Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

teste 1: *versão 2* Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

Parte 1

1. Considere a seguinte parametrização de uma curva C: $\vec{r}(t) = (\cos t, t^2),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (a) Determine a equação cartesiana de C, nas variáveis x e y, esboce a curva (tentando mesmo determinar correctamente o sentido das concavidades) e indique a orientação definida pela parametrização, caso se encontre bem definida.

   (b) Determine a velocidade e a aceleração de $\vec{r}(t)$ (e o respectivo domínio de validade).

   (c) Esboce os vectores velocidade e aceleração para $t = \frac{\pi}{4}$, colocando as origens destes vectores na extremidade de $\vec{r}(\frac{\pi}{4})$.

   (d) Escreva o integral indefinido que nos dá a função comprimento de arco relativa a $\vec{r}(t),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (e) Como a função integranda (na variável τ, digamos) que obteve na alínea anterior não é fácil de primitivar, considere, em vez dela, a sua aproximação linear, dada por $\sqrt{5}\,\tau$, calcule o respectivo integral indefinido em função de t e, depois, o seu valor para $t = \frac{\pi}{2}$ (o qual nos dá um valor aproximado para o comprimento da curva C).

   (f) Determine a parametrização por comprimento de arco para C, tomando como correcta a (aproximada) função comprimento de arco obtida na alínea anterior.

2. Considere a função dada pela expressão $f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2)\sin x, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (a) Prove que f é contínua no seu domínio.

   (b) Estude a diferenciabilidade de f.

   (c) Esboce a parte da curva de nível $f(x,y) = 0$ dentro do quadrado $[-2,2]^2$.

   (d) Determine dois dos pontos de estacionaridade de f e uma equação em x a que devem obedecer os restantes.

Parte 2

3. Determine (caso existam) o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ condicionada a $x^2 + y^2 = 2$.

4. Seja $f : \text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em (x_0, y_0, z_0), ponto interior de $\text{dom}(f)$. Seja $g = (g_1, g_2, g_3) : \text{dom}(g) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável em (u_0, v_0), ponto interior de $\text{dom}(g)$, com $g(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Suponha que $f \circ g$ faz sentido. Prove a regra de derivação das funções compostas para $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial v}(u_0, v_0)$. (NOTA: Se for útil, pode usar a regra de derivação das funções compostas do tipo $f \circ \vec{r}$, com $\vec{r}$ vectorial de uma variável real.)

FIM