# Proposta de teste de avaliação

## Matemática A

**11.º ANO DE ESCOLARIDADE**

---

**Duração:** 90 minutos | **Data:**

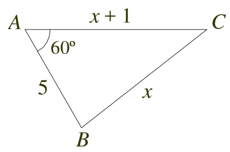
---

# Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

**1.** No triângulo $[ABC]$ da figura temos que:

- $B\hat{A}C = 60^\circ$
- $\overline{AB} = 5$
- $\overline{BC} = x$
- $\overline{AC} = x+1$




O valor de $x$ é:

**(A)** 12 **(B)** 10 **(C)** 8 **(D)** 7

**2.** Considere a função $f$ de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{k} + x & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Sabendo que $f$ é uma função contínua, o valor de $k$ é:

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

**3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} \times \cos x}{x}$:

**(A)** não existe **(B)** é igual a $+\infty$

**(C)** é igual a 1 **(D)** é igual a 0

**4.** De duas funções $f$ e $g$, diferenciáveis em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f(1) = 4$ e $f'(1) = 1$
- $g(x) = \sqrt{x+3} \times f(x)$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 1 é:

**(A)** $y = 2x + 6$ **(B)** $y = 3x + 5$

**(C)** $y = x + 3$ **(D)** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{31}{4}$

**5.** Seja $g$ uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ cujo gráfico admite uma assíntota oblíqua.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2g(x)-3x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2g(x)-3x-4}{2}=0$

Qual das seguintes expressões é uma equação dessa assíntota?

**(A)** $y=\dfrac{3}{2}x+2$ **(B)** $y=3x+2$

**(C)** $y=\dfrac{3}{2}x+4$ **(D)** $y=3x+4$

# Grupo II

**1.** Para dadas constantes reais $a$ e $b$ não nulas considere a função $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+a}$$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)=+\infty$
- $f(b+2)=4$

**1.1.** Mostre que $a=-2$ e $b=1$.

**1.2.** Resolva a condição: $f(x)<2x-2$.

**1.3.** Determine as abcissas dos pontos do gráfico de $f$ em que a reta tangente é paralela ao eixo $Ox$.

**2.** Considere as funções $f$ e $g$ definidas por $f(x)=x+2\sqrt{x}$ e $g(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

Seja $t$ a reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa 1.

**2.1.** Use a definição de derivada de uma função num ponto para mostrar que $f'(1)=2$.

**2.2.** Determine a equação reduzida da reta $t$.

**2.3.** Mostre que a reta $t$ também é tangente ao gráfico de $g$. Determine as coordenadas do respetivo ponto de tangência.

**3.** Considere a função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & \text{se } x\leq 0\\ x+\sqrt{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Estude a função $f$ quanto à existência de assíntotas ao gráfico.

**4.** Considere as funções $f$ e $g$, diferenciáveis em $\mathbb{R}$, tais que:

- $y=x-a+b$ é uma equação da reta $r$, tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $a$ ;
- é uma equação da reta $s$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $b$.

**4.1.** Determine $g(a)$ e $g'(a)$.

**4.2.** Determine $f(b)$ e $f'(b)$.

**4.3.** Mostre que $(f\circ g)(a)=0$.

**4.4.** Determine $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ g)(x)}{x-a}$.

## COTAÇÕES

**Grupo I**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | **50** |

**Grupo II**

| 1.1. | 1.2. | 1.3. | 2.1. | 2.2. | 2.3. | 3 | 4.1. | 4.2. | 4.3. | 4.4. | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 | 10 | 10 | 15 | **150** |

## Proposta de resolução

### Grupo I

**1.** Pelo Teorema de Carnot (lei dos cossenos):

$x^2 = 5^2 + (x+1)^2 - 2\times 5\times (x+1)\times \cos 60^\circ \Leftrightarrow$

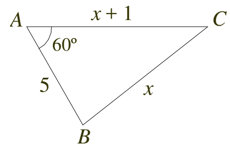
$\Leftrightarrow x^2 = 25 + x^2 + 2x + 1 - 2\times 5\times (x+1)\times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 26 + 2x - 5\times (x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 26 + 2x - 5x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7$




**Resposta: (D)**

**2.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{k} + x\right) = \sqrt{k} + 1 = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2 - x}{\sqrt{x}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[x\left(\sqrt{x}+1\right)\right] = 1\times\left(\sqrt{1}+1\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \sqrt{k} + 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$

**Resposta: (B)**

**3.** $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \cos x \le 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{0} = 0$

Logo, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\times\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cos x\times\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right) = 0$ (é o produto de uma função limitada por uma função de limite nulo).

**Resposta: (D)**

**4.** $g(x) = \sqrt{x+3}\times f(x)$, $f(1) = 4$ e $f'(1) = 1$

$g(1) = \sqrt{1+3}\times f(1) = \sqrt{4}\times 4 = 2\times 4 = 8$

O ponto de tangência tem coordenadas $(1, 8)$.

$g'(x) = \left[\sqrt{x+3}\times f(x)\right]' =$

$= \left(\sqrt{x+3}\right)'\times f(x) + \sqrt{x+3}\times f'(x) =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\times f(x) + \sqrt{x+3}\times f'(x)$

$m = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}}\times f(1) + \sqrt{1+3}\times f'(1) =$

$= \frac{1}{2\times 2}\times 4 + 2\times 1 = 1 + 2 = 3$

Equação da reta tangente:

$y-8=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-3+8 \Leftrightarrow y=3x+5$

**Resposta: (B)**

**5.** Se $g$ tem domínio $\mathbb{R}^+$ e o seu gráfico admite uma assíntota oblíqua, então existem assíntotas em $\mathbb{R}$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ e $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)-3x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2g(x)}{x}-\frac{3x}{x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)}{x}-3=0 \Leftrightarrow 2\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)-3x-4}{2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2g(x)}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{4}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{3}{2}x\right)-2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{3}{2}x\right)=2$$

Portanto, $m=\frac{3}{2}$ e $b=2$, pelo que a reta de equação $y=\frac{3}{2}x+2$ é uma assíntota ao gráfico de $g$.

**Resposta: (A)**

## Grupo II

**1.** $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+a}$

**1.1.** $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2+ax+b}{x+a}=\frac{4+2a+b}{2+a}$

Se $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$, então:

$$\begin{cases}2+a=0\\4+2a+b>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\4+2\times(-2)+b>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b>0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+b}{x-2}$$

$$f(b+2)=4\wedge b>0 \Leftrightarrow \frac{(b+2)^2-2(b+2)+b}{(b+2)-2}=4\wedge b>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+4b+4-2b-4+b}{b}=4\wedge b>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+3b}{b}=4\wedge b>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(b+3)}{b}=4\wedge b>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b+3=4\wedge b>0 \Leftrightarrow b=1$$

Portanto, $a=-2$ e $b=1$.

**1.2.** $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$

$$f(x)<2x-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-2}<2x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-2}-(2x-2)<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-(x-2)(2x-2)}{x-2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-2(x-2)(x-1)}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\left[x-1-2(x-2)\right]}{x-2}<0 \Leftrightarrow$$

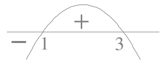
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(-x+3)}{x-2}<0 \Leftrightarrow x\in \left]1,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$$

Cálculos auxiliares:

$(x-1)(-x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | | $2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)(-x+3)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{(x-1)(-x+3)}{x-2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ |




$S=\left]1,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

**1.3.** $$f'(x)=\frac{\left(x^2-2x+1\right)'(x-2)-\left(x^2-2x+1\right)(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x-2)-\left(x^2-2x+1\right)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \wedge x-2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

Cálculos auxiliares

$x^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

Nos pontos de abcissas $1$ e $3$ a reta tangente ao gráfico de $f$ tem declive nulo, isto é, é paralela ao eixo $Ox$.

**2.** $f(x)=x+2\sqrt{x}$ e $g(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$

**2.1.** $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+2\sqrt{1+h}-\left(1+2\sqrt{1}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+2\sqrt{1+h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2\sqrt{1+h}-2}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h}+\frac{2\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}\right] = 1+2\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} =$$

$$= 1+2\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} =$$

$$= 1+2\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = 1+2\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} =$$

$$= 1+2\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = 1+2\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 1+2\times\frac{1}{2} = 2$$

**2.2.** $t: y = mx+b$

$m = f'(1) = 2$

O ponto de tangência tem coordenadas $(1, 3)$ dado que $f(1) = 1+2\sqrt{1} = 3$.

Equação da reta $t$: $y-3 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x-2+3 \Leftrightarrow y = 2x+1$

**2.3.** A reta $t$ terá de intersetar o gráfico de $g$ num ponto em que a derivada de $g$ seja igual a 2:

$$g'(x) = \frac{(3x+1)'(x+1)-(3x+1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{3(x+1)-(3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} g(x) = 2x+1 \\ g'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+1} = 2x+1 \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} = 2 \end{cases} \underset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+1 = (x+1)(2x+1) \\ 2 = 2(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 2x^2+x+2x+1 \\ (x+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \\ x+1 = 1 \vee x+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \vee x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$g(0) = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

A reta $t$ é tangente ao gráfico de $g$ no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

**3.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{se } x \le 0 \\ x+\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Assíntotas verticais:

$f$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

No ponto $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{0+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\sqrt{x}\right) = 0+\sqrt{0} = 0$

Portanto, o gráfico de $f$ não tem assíntotas verticais

Assíntotas não verticais $\left(y=mx+b\right)$:

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+0}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=-x$ é uma assíntota ao gráfico de $f$ quando $x\to-\infty$.

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\times\sqrt{x}}=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=1+\frac{1}{+\infty}=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Não existe assíntota ao gráfico de $f$ quando $x\to+\infty$.

A reta de equação $y=-x$ é a única assíntota ao gráfico de $f$ (em $-\infty$)

**4.**

**4.1.** Se a reta $r$ de equação $y=x-a+b$ é tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $a$:

- $g\left(a\right)$ é ordenada do ponto da reta $r$ com abcissa $a$ ou seja, $g\left(a\right)=a-a+b=b$;
- $g'\left(a\right)$ é igual ao declive da reta $r$, ou seja, $g'\left(a\right)=1$.

**4.2.** Se a reta $s$ de equação $y=2x-2b$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $b$:

- $f\left(b\right)$ é ordenada do ponto da reta $s$ com abcissa $b$: $f\left(b\right)=2b-2b=0$
- $f'\left(b\right)$ é igual ao declive da reta $s$: $f'\left(b\right)=2$

**4.3.** $\left(f\circ g\right)\left(a\right)=f\left[g\left(a\right)\right]=f\left(b\right)=0$ $\quad\left|\, g\left(a\right)=b \text{ e } f\left(b\right)=0\right.$

**4.4.**

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(f\circ g\right)\left(x\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(f\circ g\right)\left(x\right)-\left(f\circ g\right)\left(a\right)}{x-a}= \qquad \left|\,\left(f\circ g\right)\left(a\right)=0\right.$$

$$=\left(f\circ g\right)'\left(a\right)= \qquad \left|\,\left(f\circ g\right)'\left(a\right)=g'\left(a\right)\times g'\left(f\left(a\right)\right)\right.$$

$$=g'\left(a\right)\times f'\left(g\left(a\right)\right)= \qquad \left|\,g'\left(a\right)=1 \text{ e } g\left(a\right)=b\right.$$

$$=1\times f'\left(b\right)= \qquad \left|\,f'\left(b\right)=2\right.$$

$$=1\times2=2$$