Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere a função polinomial f definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2$$

1.1. Sabe-se que a função f tem três zeros, a, b e c, com $a < b < c$, e que o seu contradomínio é um intervalo da forma $[d, +\infty[$.

Recorrendo às capacidadades gráficas da calculadora, determine os valores de a, b, c e d, apresentando este último com arredondamento às milésimas.

Reproduza, num referencial, o gráfico da função visualizado na calculadora e que lhe permite resolver o problema.

1.2. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

(B) $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = x$

(C) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(D) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

1.3. Num referencial o.n. Oxy, considere um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 3[$.

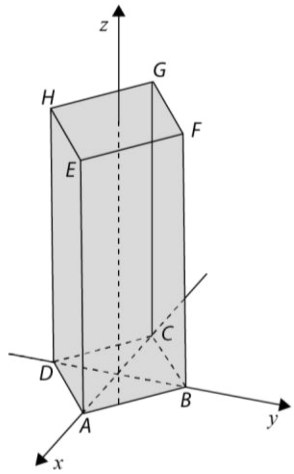
Seja A o ponto de abcissa 3.

Determine os valores de x para os quais a área do triângulo $[OAP]$ é 5.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- apresente os valores pedidos arredondados às décimas.

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$, cujo centro da base inferior é a origem do referencial.



Sabe-se que:

- os vértices A e C pertencem ao eixo das abcissas;
- os vértices B e D pertencem ao eixo das ordenadas;
- um dos vértices da base tem coordenadas $(7,0,0)$;
- o volume do prisma é 784 u.v.

2.1. Defina por uma condição o plano EFG.

2.2. Escreva uma equação vetorial da reta BH.

2.3. Considere a superfície esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 35$.

Determine um valor aproximado às centésimas do perímetro da interseção desta superfície esférica com o plano yOz.

2.4. Considere as seguintes proposições:

p: "$B + \overrightarrow{CH} = E$"

q: "$\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}\| = 8$"

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira.

(A) $p \wedge \sim q$

(B) $p \vee \sim q$

(C) $p \Rightarrow \sim q$

(D) $p \Leftrightarrow \sim q$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1	**1.2**	**1.3**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	
14	8	18	14	14	14	8	**90**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

3. Sabe-se que, para um certo valor real k, se tem:

$$2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} = k\sqrt{2}$$

O valor de k é igual a:

(A) $\frac{9}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{15}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

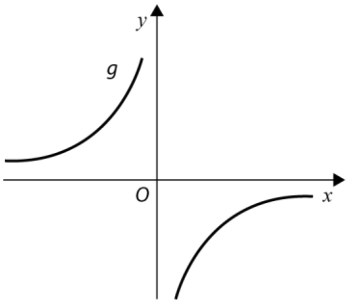
4. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f é ímpar;
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$.

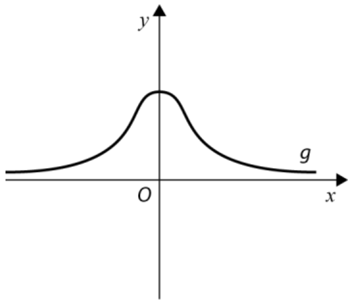
Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função g.

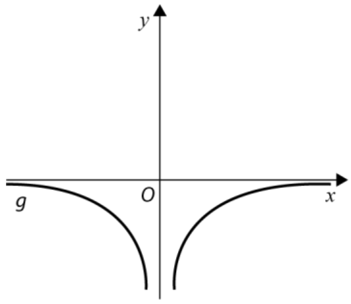
(I)



(II)



(III)



Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação não pode ser a representação gráfica da função g.

5. Considere a função f definida por:

$$f(x) = -x^2 - x + 6$$

5.1. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

p: "A função g definida por $g(x) = f(x-2)$ não tem zeros."

q: "$f(x) \leq 7$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$."

5.2. Considere, num referencial o.n. Oxy e para um determinado valor real k, a parábola que representa graficamente a função h definida por $h(x) = f(x) + k$.

Determine os valores de k de modo que o vértice da parábola pertença ao terceiro quadrante.

6. Considere, num referencial o.n. Oxy, as retas r, s e t, das quais se sabe que:

- a reta r pode ser definida pela condição $x = -2$;
- a reta s contém o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ e é paralela à reta de equação $7x + 10y = 0$;
- a reta t pode ser definida por $(x\,, y) = (\,3\,, -2) + k(5\,, -1),\ k \in \mathbb{R}$.

6.1. Seja P o ponto da reta t de ordenada -4.

Determine uma equação da circunferência de centro no ponto P e que é tangente à reta r.

6.2. Sejam A, B e C os pontos dos quais se sabe que:

- A é o ponto de interseção das retas r e s;
- B é o ponto de interseção das retas r e t;
- C é o ponto de interseção das retas s e t.

6.2.1. Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

6.2.2. Represente, num referencial ortonormado, o triângulo $[ABC]$ e determine a sua área.

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & \text{se} \quad x < 2 \\ x^3 - 1 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

7.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f não tem zeros.

(B) A função f tem um único zero.

(C) A função f tem exatamente dois zeros.

(D) A função f tem exatamente três zeros.

7.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 2x + 4$.

Qual é o valor de $(f \circ h^{-1})(4)$?

(A) -4 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 4

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

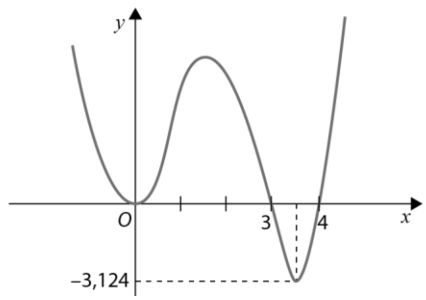
Item									
Cotação (em pontos)									
3.	**4.**	**5.1**	**5.2**	**6.1**	**6.2.1**	**6.2.2**	**7.1**	**7.2**	
8	16	14	14	14	16	12	8	8	**110**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

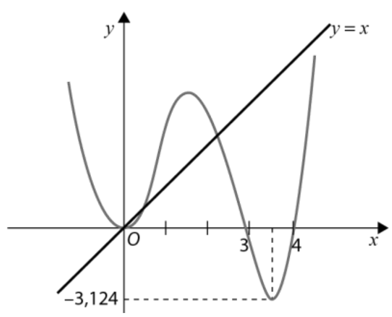
1.1. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtemos os zeros de f (0, 3 e 4) e o mínimo, aproximadamente $-3{,}124$.



Assim, $a = 0$, $b = 3, c = 4$ e $d \approx -3{,}124$.

1.2. Opção (B)

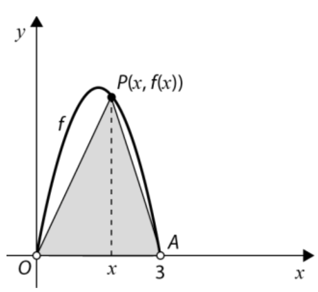
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ não é verdadeira, pois a função f não é positiva ou nula, para todo o valor real x. Por observação do gráfico de f, tem-se que f é negativa em $]3{,}4[$;
- $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = x$ é verdadeira, pois verifica-se que o gráfico da função f interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares.



Note-se que bastaria observar que $f(0) = 0$ para concluir que a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = x$ é verdadeira.

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ não é verdadeira, pois a função f não é crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$. Por exemplo, $1 < 3 \wedge f(1) > f(3)$.
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ não é verdadeira, pois a função f não é injetiva. Por exemplo, $0 \neq 4 \wedge f(0) = f(4)$.

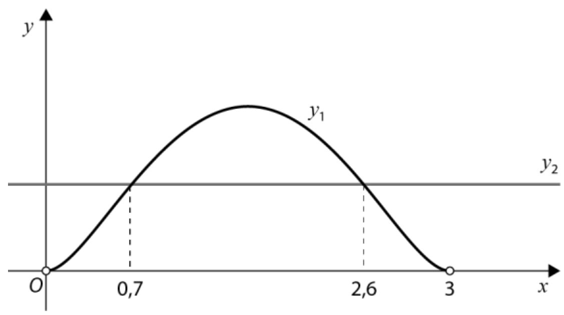
1.3.



$P(x, f(x))$

$$A_{\Delta[OAP]} = \frac{3 \times f(x)}{2}$$

Pretende-se, então, determinar os valores de $x \in]0,3[$ tais que $\frac{3f(x)}{2} = 5$.



$$y_1 = \frac{3f(x)}{2}$$

$$y_2 = 5$$

Os valores pretendidos são $x \approx 0{,}7$ e $x \approx 2{,}6$.

2.

2.1. Seja V o volume do prisma e h a altura do prisma:

$V = 784$

$A_{\text{base}} \times h = 784 \Leftrightarrow 98 \times h = 784$

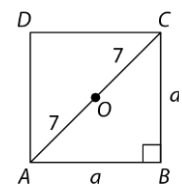
$\Leftrightarrow h = 8$

Cálculo auxiliar

$a^2 + a^2 = 14^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 = 196$

$\Leftrightarrow a^2 = 98$



O plano EFG pode então ser definido pela condição $z = 8$.

2.2. $B(0,7,0)$ $\qquad$ $H(0,-7,8)$

$\overrightarrow{BH} = H - B = (0,-14,8)$

Uma equação vetorial da reta BH é $(x,y,z) = (0,7,0) + k(0,-14,8), k \in \mathbb{R}$.

2.3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 35 \ \wedge \ x = 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 4y - 6z = 35 \ \wedge \ x = 0$ é uma condição que define uma circunferência. Como:

$y^2 + z^2 - 4y - 6z = 35 \ \Leftrightarrow \ y^2 - 4y + 2^2 + z^2 - 6z + 3^2 = 35 + 2^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow \ (y-2)^2 + (z-3)^2 = 48$

tem-se que o raio desta circunferência é $\sqrt{48}$. Assim, o seu perímetro é $2\pi \times \sqrt{48} \approx 43{,}53$ unidades de comprimento.

2.4. Opção (B)

p: "$B + \overrightarrow{CH} = E$" $\qquad$ $p \Leftrightarrow \text{V}$

q: "$\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}\| = 8$" $\qquad$ $q \Leftrightarrow \text{V}$

- $(p \ \wedge \ \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \ \wedge \ \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \ \vee \ \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \ \vee \ \text{F}) \Leftrightarrow \text{V}$
- $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$

Cálculo auxiliar

$\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}\| = \|\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{FE}\| = \|\overrightarrow{HD}\| = 8$

Caderno 2

3. Opção (C)

$$2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{2}}+2^{-\frac{3}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=3\sqrt{2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

Logo, $k=\frac{15}{4}$.

4. A função g definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pois $D_g=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \;\wedge\; x\neq 0\}$.

Assim, a representação gráfica apresentada em (II) não poderá ser a representação gráfica de g, pois apresenta-nos uma representação gráfica de uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Como f é uma função ímpar, tem-se que $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$.

Assim, $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$, ou seja, $g(-x)=g(x), \forall x\in D_g$, logo g é uma função par, o que exclui a opção apresentada em (I), já que esta é a representação gráfica de uma função ímpar (o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial).

Como $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}^-$ e $x<0, \forall x\in\mathbb{R}^-$, tem-se que $g(x)=\frac{f(x)}{x}>0, \forall x\in\mathbb{R}^-$, o que não se verifica na representação gráfica (III), que apresenta uma função negativa em todo o seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5.

5.1.

Cálculo auxiliar

$f(x)=0$

$-x^2-x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times 6}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x=3 \;\vee\; x=-2$

A função f, de domínio $\mathbb{R}$, tem dois zeros. Como o gráfico da função g se pode obter do gráfico da função f por uma translação associada ao vetor de coordenadas (2, 0), então a função g tem o mesmo número de zeros da função f. Assim, a proposição p é falsa.

(Naturalmente, a mesma conclusão se obteria determinando os zeros da função g,

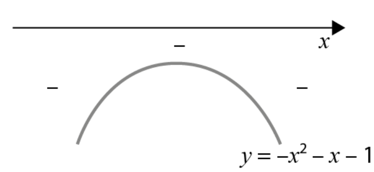
$g(x)=f(x-2)=-(x-2)^2-(x-2)+6$).

Cálculos auxiliares

$f(x)\leq 7$

$-x^2-x+6\leq 7 \Leftrightarrow -x^2-x-1\leq 0$

$-x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times(-1)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{-2}}_{\text{equação impossível}}$



Verifica-se, assim, que $f(x) \leq 7$ tem conjunto-solução $\mathbb{R}$, sendo então uma condição universal em $\mathbb{R}$ e q é uma proposição verdadeira.

5.2. Seja V_f o vértice da parábola que representa graficamente a função f.

Sabe-se que $V_f = \left(\frac{-(-1)}{2\times(-1)}, f\left(\frac{-(-1)}{2\times(-1)}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Cálculo auxiliar
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$

Seja V_h o vértice da parábola que representa graficamente a função h: $V_h = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4} + k\right)$

Para que este ponto pertença ao terceiro quadrante, a abcissa e a ordenada têm de ser negativas.

$-\frac{1}{2} < 0 \ \wedge \ \frac{25}{4} + k < 0$, logo $k < -\frac{25}{4}$.

Assim, $k \in \left]-\infty, -\frac{25}{4}\right[$.

6.

6.1. $(x, -4) = (3, -2) + k(5, -1), \ k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ -4 = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ k = 2 \end{cases}$$

Logo, $P(13, -4)$.

Para que a circunferência tenha centro no ponto P, de coordenadas $(13, -4)$, e seja tangente à reta r definida por $x = -2$, o raio tem de ser $13 + |-2| = 15$.

Uma equação da circunferência pedida é, então:

$$(x - 13)^2 + (y + 4)^2 = 15^2$$

6.2.

6.2.1.

Cálculo auxiliar
$7x + 10y = 0 \Leftrightarrow 10y = -7x \Leftrightarrow y = -\frac{7}{10}x$

- s: $y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

  r: $x = -2$

  $y = -\frac{7}{10} \times (-2) + \frac{13}{5} \Leftrightarrow y = \frac{14}{10} + \frac{26}{10} \Leftrightarrow y = \frac{40}{10} \Leftrightarrow y = 4$

  Logo, $A(-2, 4)$.

- $t: (x, y) = (3, -2) + k(5, -1), \ k \in \mathbb{R}$

  $r: x = -2$

  $(-2, y) = (3, -2) + k(5, -1)$, para algum $k \in \mathbb{R}$

  $$\begin{cases} -2 = 3 + 5k \\ y = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

  Logo, $B(-2, -1)$.

- s: $y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

  t: $(x\,,y) = (\,3\,,-2) + k(5\,,-1), k \in \mathbb{R}$

  Equação reduzida da reta t:

  $$y = -\frac{1}{5}x + b$$

  Como $(3,-2)$ pertence à reta t, tem-se:

  $$-2 = -\frac{1}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{3}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{7}{5}$$

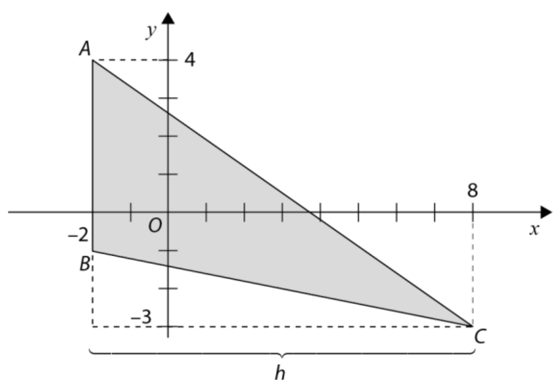
  Assim, t: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$.

  $$\begin{cases} y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{10}x + \frac{7}{10}x = \frac{13}{5} + \frac{7}{5} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{10}x = \frac{20}{5} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 4 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{5} \times 8 - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$$

  Logo, $C(8,-3)$.

6.2.2.



$$\overline{AB} = 4 + |-1| = 5$$

$$h = 8 + |-2| = 10$$

$$A = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \text{ u.a.}$$

7.

7.1. Opção (B)

Em $x < 2$:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \ \wedge \ x < 2 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \ \wedge \ x < 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \ \wedge \ x < 2$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \ \vee x = -1) \ \wedge \ x < 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Em $x \geq 2$:

$$x^3 - 1 = 0 \ \wedge \ x \geq 2 \ \Leftrightarrow x^3 = 1 \ \wedge \ x \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 1 \ \wedge \ x \geq 2}_{\text{condição impossível}}$$

-1 é o único zero da função f.

7.2. Opção (A)

$$(f \circ h^{-1})(4) = f\left(h^{-1}(4)\right) = f(0) = 0^2 - 0 - 4 = -4$$

Cálculo auxiliar

$h(x) = 4$

$2x + 4 = 4 \Leftrightarrow \ 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Logo, $h^{-1}(4) = 0$.