Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova (Caderno 1+ Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Esta prova é constituída por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

A prova inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final de cada caderno.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

A prova integra alguns itens em alternativa que estarão identificados na prova da seguinte forma: P2001/2002 (Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002) e PMC2015 (Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015). Em cada conjunto de itens apresentados em alternativa, o aluno pode optar por qualquer um dos itens, independentemente do referencial curricular em que se enquadrou o seu percurso de aprendizagem.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\ \cos b + \operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\,e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}.u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 75 MINUTOS

TOLERÂNCIA: 15 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere todos os números naturais de seis algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4$ e 5.

Destes números, quantos são múltiplos de 5 e têm os algarismos pares todos juntos?

(A) 24 **(B)** 32 **(C)** 36 **(D)** 44

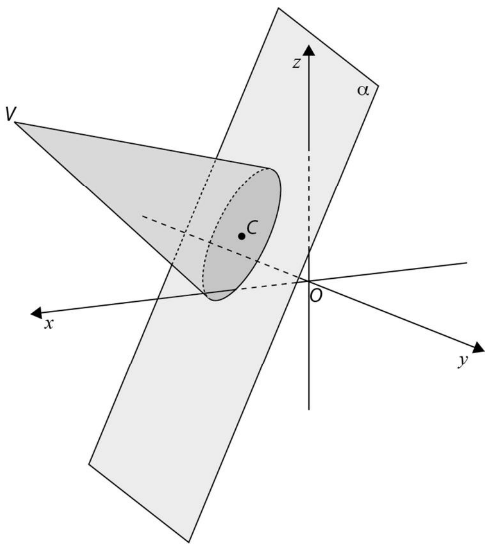
2. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos, ambos com probabilidade não nula. Sabe-se que:

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{0{,}16}{P(A \cap B)}$
- $P(A) = \frac{1}{6} P(A \cup B)$
- $P(B) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $\frac{1}{20}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{3}{50}$ **(D)** $\frac{4}{50}$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.



Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano α definido por $2x - y + z = 4$;
- o ponto C, centro da base do cone, tem coordenadas $(1, -1, 1)$;
- o vértice V do cone tem cota positiva.

3.1. Seja β o plano definido pela condição $x = 1 - 6y - 4z$.
Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

3.2. Sabendo que a altura do cone é igual a $4\sqrt{6}$ unidades de comprimento, determine as coordenadas do vértice V do cone.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right)$. Considere a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{4n}$. Qual é o valor de $\lim_{n \to +\infty} f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** e^{-4} **(C)** 1 **(D)** e

5. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Quinze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço, arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, da posição da cadeira ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por:

$$d(t) = \begin{cases} 20 + t\cos(\pi t) & \text{se} \quad 0 \leq t < 15 \\ 20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t) & \text{se} \quad t \geq 15 \end{cases}$$

(o argumento da função cosseno está expresso em radianos)

Resolva o item **5.1.** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

5.1. Justifique que houve, pelo menos, um instante, entre os catorze segundos e os dezasseis segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 decímetros.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

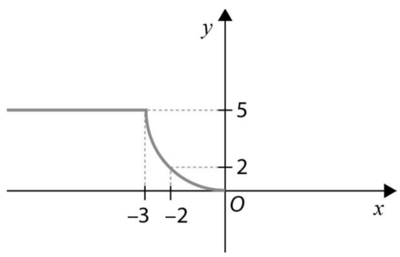
5.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o instante em que a distância da posição da cadeira ao muro é máxima e o valor da distância máxima.

Apresente os dois valores arredondados às unidades.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log(x)$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, da qual se sabe que é par, tem um único zero e parte da sua representação gráfica encontra-se na figura abaixo.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?



(A) $(f \times g)(3) < 0$

(B) $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

(C) $(f \circ g)(4) \geq 1$

(D) $(f^{-1} + f)(1) = 0$

Itens em alternativa

7.1.	7.2.
P2001/2002	PMC2015

7.1. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição normal de valor médio 10. Se $P(10 \leq X \leq 12) = 0{,}2$, então qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $P(X < 12) > P(X > 7)$

(B) $P(9 \leq X \leq 11) = 0{,}2$

(C) $P(8 \leq X \leq 12) > 0{,}4$

(D) $P(X \leq 8 \vee X \geq 12) = 0{,}6$

7.2. Seja f a função definida por $f(x) = -\pi + \arccos(2x + 1)$.

Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

(A) $[-1{,}0]$ e $[-\pi, 0]$

(B) $[0{,}1]$ e $[-\pi, 0]$

(C) $[-1{,}0]$ e $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

(D) $[0{,}1]$ e $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

8. Considere duas caixas, C_1 e C_2. A caixa C_1 tem 10 bolas, das quais seis são brancas e as restantes são pretas. A caixa C_2 tem sete bolas, umas brancas e outras pretas.

Considere a experiência que consiste em retirar, ao acaso, duas bolas da caixa C_1, colocá-las na caixa C_2 e, em seguida, retirar, também ao acaso, duas bolas da caixa C_2.

Considere os acontecimentos:

A: "As bolas retiradas da caixa C_1 têm a mesma cor."

B: "As bolas retiradas da caixa C_2 são brancas."

Sabe-se que $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{12}$.

Interprete o significado de $P(B|\bar{A})$ e determine quantas bolas brancas e quantas bolas pretas existiam inicialmente na caixa C_2.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item										
Cotação (em pontos)										
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1. 7.2.**	**8.**	**Pontos**
5	5	15	15	5	15	15	5	5	15	**100**

CADERNO 2: 75 MINUTOS

TOLERÂNCIA: 15 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

Itens em alternativa

9.1.	9.2.
P2001/2002	**PMC2015**

9.

9.1. Um estudo revela que, num determinado centro de saúde, 2% das seringas fornecidas por determinada empresa têm defeito.

Considere um lote de 40 seringas produzidas por essa empresa.

Indique qual dos acontecimentos tem probabilidade igual a $1 - 0{,}98^{40} - 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39}$.

(A) Pelo menos duas seringas terem defeito.

(B) Pelo menos uma seringa ter defeito.

(C) No máximo duas seringas terem defeito.

(D) No máximo uma seringa ter defeito.

9.2. Considere, num plano munido de um referencial o.n. xOy, a elipse definida pela condição $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ e um triângulo $[ABC]$.

Os vértices A e C são focos da elipse.

O vértice B é um ponto da elipse.

Qual é o perímetro do triângulo $[ABC]$?

(A) 12 **(B)** 14 **(C)** 16 **(D)** 18

10. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 0$;
- $f'(x) > 0$, para qualquer número real x;
- $\lim\limits_{h\to0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ existe e é negativo, para qualquer número real x.

Considere as afirmações seguintes:

(I) O gráfico da função f apresenta a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

(II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

(III) A reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0.

Elabore uma composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

11. De uma função f, diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3 é $60°$. De uma função g, de domínio $]-\infty, 3[$, sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}}{f(x)-f(3)} + \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ pode ser:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\sqrt{3}$

12. Seja (u_n) uma sucessão real em que todos os termos são negativos.

Sabe-se que, para todo o número natural n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é decrescente.

(B) A sucessão (u_n) não é limitada.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

(D) A sucessão (u_n) é convergente.

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(-x)} & \text{se} \quad x < 0 \quad \wedge \quad x \neq -1 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\text{sen}\,(2x)}{e^x - 1} + 3x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \quad , \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

13.1. Mostre que não existe nenhum valor real k tal que a função f seja contínua em $x = 0$.

13.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

13.3. Considere agora a função g, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $g(x) = \frac{\ln(-x)}{x^2}$.

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

14. Considere, no plano complexo, um ponto A, afixo de um certo número complexo z.

Sabe-se que A pertence ao primeiro quadrante e que $\text{Re}(z) > \text{Im}(z)$.

A que quadrante do plano complexo pertence o afixo de $\frac{z}{i} - \bar{z}$?

(A) Primeiro

(B) Segundo

(C) Terceiro

(D) Quarto

15. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

15.1. Considere $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Determine o menor valor de n natural para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

15.2. Prove que $|z + i|^2 - |z - i|^2 = 4\operatorname{Im}(z)$.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
9.1. 9.2.	**10.**	**11.**	**12.**	**13.1.**	**13.2.**	**13.3.**	**14.**	**15.1.**	**15.2.**	**Pontos**
5	15	5	5	10	15	15	5	15	10	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)										**200**

Prova-Modelo de Exame – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

Pretende-se determinar a quantidade de números constituídos por seis algarismos diferentes, múltiplos de 5 e com os algarismos pares todos juntos, usando apenas os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Assim, existem três casos mutuamente exclusivos (terminar em 0, ou terminar em 5 e começar por um algarismo par, ou terminar em 5 e começar por um algarismo ímpar):

__ __ __ _P_ _P_ _0_ ou _P_ _P_ _P_ __ __ _5_

$3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1$ $\quad$ $2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1$

ou _I_ _P_ _P_ _P_ __ _5_

$+ 2 \times (2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1)$

$= 12 + 8 + 24 =$

$= 44$

2. Opção (C)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{0{,}16}{P(A \cap B)} \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) \times P(A \cap B) = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - P(A \cap B)\right) \times P(A \cap B) = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow -\left(P(A \cap B)\right)^2 + P(A \cap B) - 0{,}16 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times (-0{,}16)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \quad \vee \quad P(A \cap B) = 0{,}8$$

Como $P(A \cap B) \leq P(B)$, então $P(A \cap B) = 0{,}2$.

$$P(A) = \frac{1}{6} P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}\left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6} P(A) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - \frac{1}{6} P(A) = \frac{1}{12} - \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} P(A) = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{50}$$

3.

3.1. Dois planos são perpendiculares se e só se o produto escalar entre dois quaisquer vetores normais a cada um dos planos for igual a zero.

$\vec{n}_\alpha(2,-1,1)$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{n}_\beta(1,6,4)$ é um vetor normal ao plano β.

$(2,-1,1).(1,6,4) = 2-6+4 = 0$

Logo, α e β são perpendiculares.

3.2. Vamos começar por definir vetorialmente a reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto C:

$(x,y,z) = (1,-1,1) + k(2,-1,1), k \in \mathbb{R}$

Como V pertence a esta reta, então as suas coordenadas são do tipo $(1+2k,-1-k,1+k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Pretende-se que $\|\overrightarrow{CV}\| = 4\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{CV} = (1+2k,-1-k,1+k) - (1,-1,1) = (2k,-k,k)$

$$\sqrt{4k^2+k^2+k^2} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6k^2} = 4\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6}|k| = 4\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow k = 4 \quad \vee \quad k = -4$$

Se $k = 4$, então $V(9,-5,5)$.

Se $k = -4$, então $V(-7,3,-3)$.

Como a cota de V é positiva, então $V(9,-5,5)$.

4. Opção (A)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{4n} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n\right]^4 = e^{-4}$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e^{-4}} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to e^{-4}} \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right) =$$
$$= \ln(1)$$
$$= 0$$

5.

5.1. d é contínua em $[0,15[$ e em $]15,+\infty[$, uma vez que, nestes intervalos, a função é definida pela soma de funções contínuas.

d é contínua em 15, pois $\lim_{t\to 15^-} d(t) = \lim_{t\to 15^+} d(t) = d(15)$.

$$\lim_{t\to 15^-} d(t) = \lim_{t\to 15^-}(20 + t\cos(\pi t)) =$$
$$= 20 + 15 \times \cos(15\pi) =$$
$$= 20 - 15 =$$
$$= 5$$

$\lim_{t\to 15^+} d(t) = \lim_{t\to 15^+}(20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t)) =$

$= 20 + 15e^0\cos(15\pi) =$

$= 20 - 15 =$

$= 5$

$d(15) = 20 + 15e^0 \cos(15\pi) = 20 - 15 = 5$

1) d é contínua em $[14,16]$.

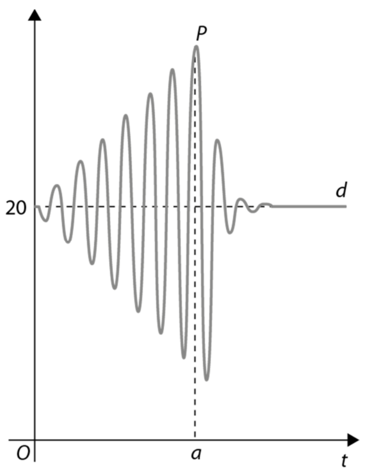
2) $d(16) < 30 < d(14)$

$d(14) = 20 + 14\cos(14\pi) = 34$

$d(16) = 20 + 15e^{-1}\cos(16\pi) = 20 + \frac{15}{e} \approx 25{,}52$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]14,16[: d(c) = 30$, isto é, houve, pelo menos, um instante entre os 14 s e os 16 s após o início da contagem do tempo em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 dm.

5.2.



$P(a,b)$

$a \approx 14$

$b \approx 34$

A distância máxima é 34 dm para $t = 14$ s, aproximadamente.

6. Opção (B)

$(f \times g)(3) = f(3) \times g(3) = \log(3) \times g(-3) = 5\log(3) > 0$

$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(-\frac{1}{2}\right)} < 0$, pois $\log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ e $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

$(f \circ g)(4) = f\big(g(4)\big) = f\big(g(-4)\big) = f(5) = \log(5) < \log(10) = 1$

$(f^{-1} + f)(1) = f^{-1}(1) + f(1) =$

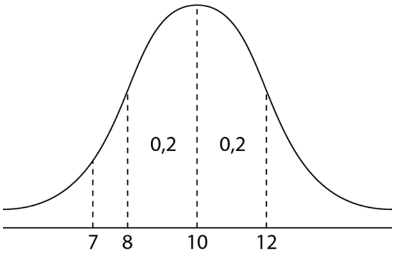
$= 10 + \log(1) =$

$= 10$

7.

7.1. Opção (D)

$X \sim N(10, \sigma)$



Então:

$P(X < 12) = P(X < 10) + P(10 < X < 12) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

$P(X > 7) = P(7 < X < 8) + P(X > 8) = P(7 < X < 8) + 0{,}7$, logo, $P(X < 12) < P(X > 7)$.

$P(9 \leq X \leq 11) > P(8 \leq X \leq 10) = 0{,}2$, pois a área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equação $x = 9$ e $x = 11$ é superior à área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equação $x = 8$ e $x = 10$.

$P(8 \leq X \leq 12) = 0{,}4$

$P(X \leq 8) = 0{,}3$

$P(X \geq 12) = 0{,}3$

$P(X \leq 8 \quad \vee \quad X \geq 12) = 0{,}6$

7.2. Opção (C)

$-1 \leq 2x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$

$D_f = [-1{,}0]$

$0 \leq \arccos(2x + 1) \leq \pi, \forall x \in [-1{,}0] \Leftrightarrow -\pi \leq -\pi + \arccos(2x + 1) \leq 0, \forall x \in [-1{,}0]$

$D'_f = [-\pi, 0]$

8. $P(B|\overline{A})$, no contexto da situação descrita, significa a probabilidade de se retirarem da caixa 2 duas bolas brancas, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor.

Se as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor, tal significa que se colocou na caixa 2 uma bola branca e uma bola preta, ficando a caixa 2 com 9 bolas, das quais x são brancas $(x > 0)$ e $9 - x$ são pretas. Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{x(x-1)}{9 \times 8}$.

$\frac{x(x-1)}{9 \times 8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(x^2 - x) = 72$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 12x - 72 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -2$

Como $x > 0$, então $x = 3$. Logo, existiam inicialmente 2 bolas brancas e 5 bolas pretas.

Caderno 2

9.

9.1. Opção (A)

X: "número de seringas com defeito no lote de 40 seringas"

$X \sim B(40; 0{,}02)$

$P(X=0) = 0{,}98^{40}$

$P(X=1) = 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

Assim, a probabilidade dada é a probabilidade do acontecimento "pelo menos duas seringas terem defeito". Os restantes acontecimentos não têm igual probabilidade, pois:

- a probabilidade de no lote de 40 seringas pelo menos uma seringa ter defeito é dada por:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}98^{40}$$

- a probabilidade de no lote de 40 seringas no máximo duas seringas terem defeito é dada por:

$$P(X \leq 2) = 0{,}98^{40} + 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39} + 780 \times 0{,}02^{2} \times 0{,}98^{38}$$

- a probabilidade de no lote de 40 seringas no máximo uma seringa ter defeito é dada por:

$$P(X \leq 1) = 0{,}98^{40} + 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39}$$

9.2. Opção (C)

$a^2 = 25$ e $b^2 = 16$, então $a = 5$ e $b = 4$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, logo $2c = 6$.

$P_{[ABC]} = \underbrace{\overline{AC}}_{2c} + \underbrace{\overline{AB} + \overline{CB}}_{2a} = 6 + 10 = 16$

10. Como $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ existe e é negativo, para qualquer número real x, significa que a segunda derivada existe e é sempre negativa, pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. Conclui-se, assim, que a afirmação (I) é verdadeira.

Como $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - 2x) = 0$, tal significa que $y = 2x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, logo não admite assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, tornando assim a afirmação (II) falsa.

Relativamente à afirmação (III), podemos afirmar que é falsa. Supondo que a reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0, então o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 deveria ser $-\frac{1}{2}$ (visto as retas serem perpendiculares), o que é absurdo, pois sabemos que $f'(x) > 0$, para qualquer número real x.

11. Opção (B)

$t \rightarrow$ reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$.

$m_t = \text{tg}60° = \sqrt{3} = f'(3)$

Sabemos que $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \pm\infty$. Logo:

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}}{f(x)-f(3)} + \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}(x-3)}{f(x)-f(3)} + \frac{f(3)}{\pm\infty}$ (f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$; em particular, é contínua em $x = 3$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$.)

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}} + 0 =$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{f'(3)} =$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= 1$$

12. Opção (D)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é crescente. (1)

Assim, $u_1 \leq u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é limitada. (2)

Por (1) e (2), conclui-se que (u_n) é convergente.

Como (u_n) é crescente e limitada, então (u_n) não pode ser uma progressão aritmética.

13.

13.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, isto é:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Sabe-se que $f(0) = k$.

E:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{e^x - 1} + 3x\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}\right) + \lim_{x\to 0^+}(3x) =$$

$$= \frac{\lim_{2x\to 0^+}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right)}{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}} + 0 =$$

$$= \frac{1 \times 2}{1} =$$

$$= 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\ln(-x)} = \frac{0^+}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, pode concluir-se que não existe um valor de k tal que f seja contínua em $x = 0$.

13.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(-x)} & \text{se} \quad x < 0 \quad \wedge \quad x \neq -1 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\text{sen}\,(2x)}{e^x - 1} + 3x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} + 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{sen}(2x)}{x(e^x - 1)} + 3 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\text{sen}(2x) \times \frac{1}{x(e^x - 1)} \right) + 3 =$$

$$= 0 + 3 =$$

$$= 3$$

Cálculos auxiliares

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{x(e^x - 1)} = 0$, pois $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = \frac{1}{+\infty(e^{+\infty} - 1)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} = 0$, pois $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} + 3x - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\text{sen}(2x) \times \frac{1}{e^x - 1} \right) =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{\ln(-x)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x \times \ln(-x)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\ln(-x)} =$$

Consideremos a mudança de variável $y = -x$. Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-y}{\ln(y)} =$$

$$= -\frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}} =$$

$$= -\frac{1}{0^+} =$$

$$= -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não admite assíntotas não verticais quando $x \longrightarrow -\infty$.

13.3. Em $\mathbb{R}^-$:

$$g'(x)=\frac{[\ln(-x)]'\,x^2-(x^2)'\times\ln(-x)}{(x^2)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2-2x\times\ln(-x)}{x^4}=$$

$$=\frac{x-2x\times\ln(-x)}{x^4}=$$

$$=\frac{1-2\ln(-x)}{x^3}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln(-x)}{x^3}=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\ln(-x)=0\ \wedge\ x^3\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x)=\frac{1}{2}\ \wedge\ x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x=e^{\frac{1}{2}}\ \wedge\ x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=-e^{\frac{1}{2}}\ \wedge\ x\neq 0$$

Assim:

x	$-\infty$	$-e^{\frac{1}{2}}$		0
$1-2\ln(-x)$	$-$	0	$+$	S. S.
x^3	$-$	$-$	$-$	S. S.
Sinal de g'	$+$	0	$-$	S. S.
Variação de g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	S. S.

S.S.: sem significado

Cálculos auxiliares

$$1-2\ln(-x)>0\Leftrightarrow -2\ln(-x)>-1$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x)<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x<e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x>-e^{\frac{1}{2}}$$

$$g\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

g é estritamente crescente em $\left]-\infty,-e^{\frac{1}{2}}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[-e^{\frac{1}{2}},0\right[$;

g admite um máximo relativo (absoluto) igual a $\frac{1}{2e}$ para $x=-e^{\frac{1}{2}}$.

14. Opção (C)

$z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$

$a>b$

$$\frac{z}{i}-\overline{z}=\frac{a+bi}{i}-(a-bi)=\frac{(a+bi)i}{-1}-a+bi=$$

$$=-ai+b-a+bi=$$

$$=\underbrace{(b-a)}_{\text{negativo}}+\underbrace{(b-a)}_{\text{negativo}}i$$

Como $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}-\overline{z}\right)<0$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}-\overline{z}\right)<0$, conclui-se que o afixo de $\frac{z}{i}-\overline{z}$ pertence ao 3.º quadrante.

15.

15.1. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \sqrt{3}$

$\theta \in 3.^\text{o}\,\text{Q}$

$\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

$z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \overline{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$

$= \overline{e^{i\frac{\pi}{5}}} =$

$= e^{-i\frac{\pi}{5}}$

$(z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)^n = 2^n e^{i\left(\frac{17\pi}{15}n\right)}$

$2^n e^{i\left(\frac{17\pi}{15}n\right)}$ é um número real positivo se e só se:

$\frac{17\pi}{15}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{30}{17}k, k \in \mathbb{Z}.$

$k = 17 \curvearrowright n = 30 \;\; (\in \mathbb{N})$

30 é o menor valor de n natural nas condições pretendidas.

15.2. $|z+i|^2 - |z-i|^2 = (z+i)\left(\overline{z+i}\right) - (z-i)\left(\overline{z-i}\right) =$

$= (z+i)\left(\bar{z}+\bar{i}\right) - (z-i)\left(\bar{z}-\bar{i}\right) =$

$= (z+i)(\bar{z}-i) - (z-i)(\bar{z}+i) =$

$= z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 - (z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2) =$

$= z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 - z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1 =$

$= -2iz + 2i\bar{z} =$

$= -2i(z - \bar{z}) =$

$= -2i \times 2\text{Im}(z)i =$

$= -4\text{Im}(z) \times i^2 =$

$= 4\text{Im}(z)$