



Nome: \_\_\_\_\_

Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

**CADERNO 1**  
**(É permitido o uso de calculadora gráfica)**

1. Considera todos os números de nove algarismos diferentes que se podem representar com os algarismos de 1 a 9.

1.1. Quantos desses números são ímpares e os algarismos pares ocupam posições consecutivas?

- (A) 345 600                      (B) 600                      (C) 2880                      (D) 14 400

1.2. Cada um dos nove algarismos, de 1 a 9, foi representado numa bola. As nove bolas foram introduzidas num saco.

De seguida, ao acaso, foram retiradas do saco, de uma só vez, duas bolas.

Considera os acontecimentos:

X: “O produto dos números das bolas retiradas é um número par”

Y: “Os números das bolas retiradas são primos”

Qual é o valor da probabilidade condicionada  $P(Y|X)$ ?

- (A)  $\frac{3}{26}$                       (B)  $\frac{5}{36}$                       (C)  $\frac{1}{6}$                       (D)  $\frac{1}{40}$

2. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = x + \log_3 x$ .

O valor arredondado às décimas da taxa de variação média no intervalo  $[3, 5]$  é igual a:

- (A) 0,8                      (B) 1,2                      (C) 2,5                      (D) 1,5

3. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sqrt{e^{-2x} + x^2}$ .

3.1. O gráfico de  $f$  tem uma assíntota quando  $x \rightarrow +\infty$ . Determina a equação dessa assíntota.

3.2. Justifica, **sem recorrer à calculadora**, que a função  $f'$ , derivada de  $f$ , tem um zero no intervalo  $]0, 1[$ .

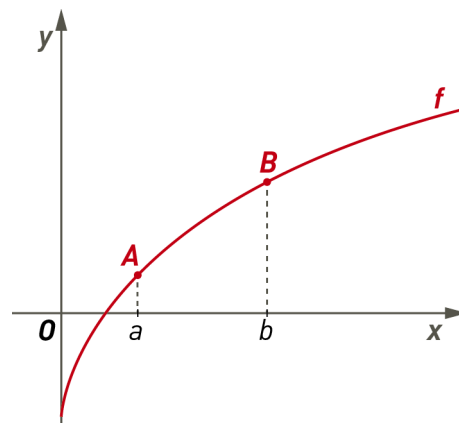
**Recorre à calculadora gráfica** e determina o valor desse zero, arredondado às centésimas.

4. Na figura está representada a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}_0^+$ , definida por:

$$f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$$

Os pontos  $A$  e  $B$ , de abcissas respetivamente,  $a$  e  $b$ , pertencem ao gráfico de  $f$  e a ordenada de cada um deles é igual a metade da respetiva abcissa.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina o valor da diferença  $b - a$ . Apresenta o resultado arredondado às décimas.



Na tua resolução deves apresentar:

- a equação que traduz a relação entre as ordenadas e as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ ;
- o gráfico ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinala os pontos  $A$  e  $B$  e os valores das abcissas arredondados às milésimas;
- o valor da diferença  $b - a$ , arredondado às décimas.

### FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	1.1	1.2	2.	3.1.	3.2.	4.	
Pontos	10	10	10	15	20	15	80

**CADERNO 2**  
**(Não é permitido o uso de calculadora)**

5. Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2k} \right)^n = \sqrt{e}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

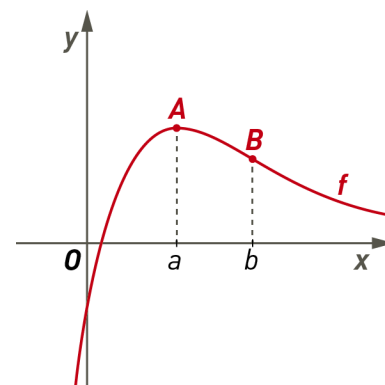
Qual é o valor de  $k$ ?

- (A)  $\sqrt{2}$                       (B)  $-\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $-\frac{1}{2}$

6. Na figura, em referencial ortonormado  $xOy$ , está representada a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{5x-1}{e^x}$ .

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$ , tem abscissa  $a$  e a ordenada é máximo absoluto da função;
- o ponto  $B$  tem abscissa  $b$  e é ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .



6.1. Determina, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico de  $f$ .

6.2. A medida do lado de um quadrado é  $b-a$ . Determina a medida de cada uma das diagonais desse quadrado.

7. Sabe-se que  $\log_2(4a) = \frac{2}{3}$ .

Qual é o valor de  $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ ?

- (A)  $\frac{2}{3}$                       (B)  $-\frac{1}{6}$                       (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       (D)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Seja  $k$  um número real.

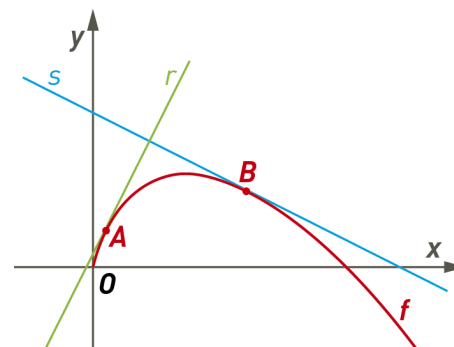
Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 2 + e^x}{x} = \frac{5}{2}$ . O valor de  $k$  é:

- (A) 2                      (B)  $\frac{7}{2}$                       (C)  $\frac{3}{2}$                       (D) 3

9. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}^+$  definida por  $f(x) = x \ln\left(\frac{3}{x}\right)$ .

Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico de  $f$ ;
- as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares e tangentes ao gráfico de  $f$ , respetivamente, nos pontos  $A$  e  $B$ ;
- a abcissa do ponto  $A$  é  $\frac{3}{e^3}$ .



Determina as coordenadas do ponto  $B$ .

10. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = xe^{-x}$ .

Sejam  $f'$  e  $f''$ , respetivamente, a função derivada de  $f$  e a função segunda derivada de  $f$ .

10.1. Seja  $P$  o ponto do gráfico de  $f$ , de coordenadas não nulas, em que a ordenada é o dobro da abcissa.

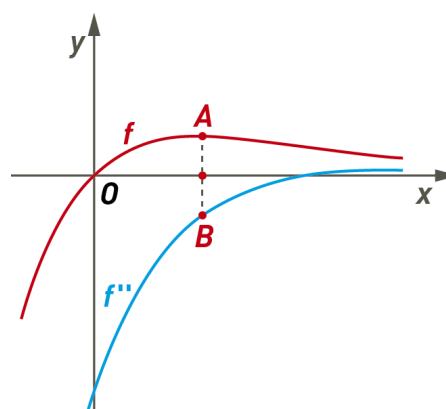
Mostra que o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$  é igual a  $2 + \ln 4$ .

10.2. Na figura, em referencial cartesiano  $xOy$ , estão representadas as funções  $f$  e  $f''$ .

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$ ;
- o ponto  $B$  pertence ao gráfico de  $f''$ ;
- os pontos  $A$  e  $B$  são simétricos em relação a  $Ox$  (eixo das abcissas).

Determina as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ .



11. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$  e diferenciável.

Sabe-se que:

- $f$  é estritamente decrescente;
- 2 é zero de  $f$ .

Considera a função  $g$  de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$

Determina, na forma de intervalo de números reais, o conjunto-solução da inequação  $g'(x) < 0$ , sendo  $g'$  a função derivada de  $g$ .

### FIM (Caderno 2)

Cotações										
Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	1.1	1.2	2.	3.1.	3.2.	4.				
Pontos	10	10	10	15	20	15	Total		80	
Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	5.	6.1.	6.2.	7.	8.	9.	10.1.	10.2.	11.	
Pontos	10	10	20	10	10	20	15	15	10	Total 120
Total										200

## FORMULÁRIO

### GEOMETRIA

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Comprimento de um arco de circunferência:  $\alpha r$

( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  
 $r$  – raio)

#### Áreas de figuras planas

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$

( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

#### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$

( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4\pi r^2$

( $r$  – raio)

#### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### PROGRESSÕES

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

Progressão aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### TRIGONOMETRIA

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

### COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \text{ ou } (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ ou } \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

## PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

1.1. Algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9

Algarismos pares: 2, 4, 6, 8

N.º de possibilidades para o algarismo das unidades: 5

N.º de sequências com os algarismos pares consecutivos: 4!

N.º de possibilidades de representar os 4 algarismos ímpares e a sequência de pares: 5!

$$5 \times 4! \times 5! = 14400$$

Opção: (D) 14400

1.2.

N.º de casos favoráveis a X:  ${}^4C_1 \times {}^5C_1 + {}^4C_2 = 4 \times 5 + 6 = 26$

N.º de casos favoráveis a  $X \cap Y$ : 3

$$P(Y|X) = \frac{3}{26}$$

Opção: (A)  $\frac{3}{26}$

2.  $f(x) = x + \log_3 x$

$$\text{t.m.v.}_{[3,5]} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \approx 1,2$$

Opção: (B) 1,2

3.

3.1. Tem-se  $f(x) = \sqrt{e^{-2x} + x^2}$

Seja  $y = mx + b$  a equação da assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^{-2x} + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^{-2x} + x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{e^{2x} x^2} + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1$$



$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^{-2x} + x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{e^{-2x} + x^2} - x)(\sqrt{e^{-2x} + x^2} + x)}{(\sqrt{e^{-2x} + x^2} + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + x^2 - x^2}{(\sqrt{e^{-2x} + x^2} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{(\sqrt{e^{-2x} + x^2} + x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

**Resposta:** A assíntota pode ser representada pela equação  $y = x$ .

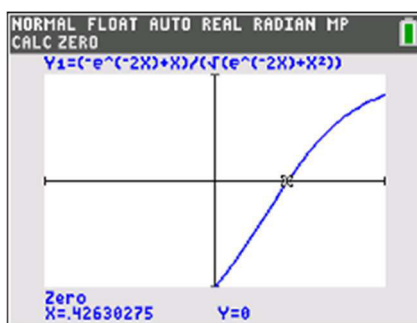
$$3.2. \quad f'(x) = \frac{(e^{-2x} + x^2)'}{2\sqrt{e^{-2x} + x^2}} = \frac{-2e^{-2x} + 2x}{2\sqrt{e^{-2x} + x^2}} = \frac{-e^{-2x} + x}{\sqrt{e^{-2x} + x^2}}$$

A função  $f'$ , derivada de  $f$ , tem domínio  $\mathbb{R}$  e é contínua, em particular, é contínua em  $]0, 1[$ .

$$f'(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'(1) = \frac{-\frac{1}{e^2} + 1}{\sqrt{-\frac{1}{e^2} + 1}} > 0. \quad \text{Então} \quad f'(0) \times f'(1) < 0.$$

Pelo Corolário do teorema de Bolzano conclui-se que  $\exists c \in ]0, 1[ : f'(c) = 0$ , ou seja, a função  $f'$  tem um zero no intervalo  $]0, 1[$ .

Introduzindo a expressão da função  $f'$  na calculadora gráfica, define-se uma janela adequada que permita a visualização do zero da função no intervalo  $]0, 1[$ .



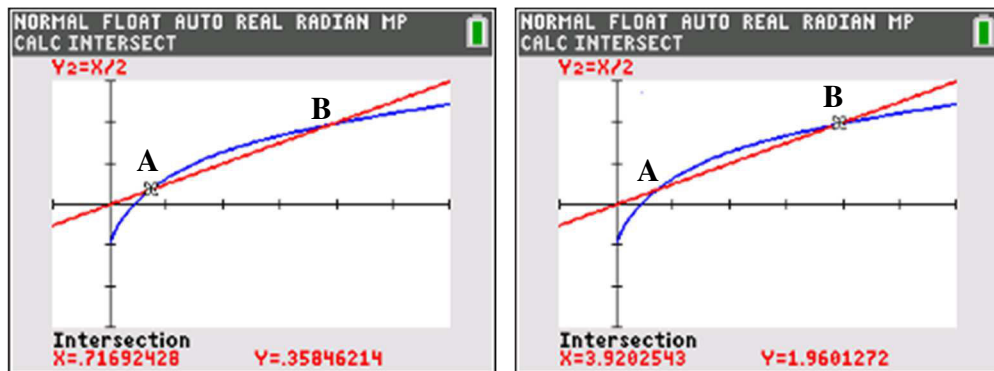
**Resposta:** O valor, arredondado às centésimas, do zero de  $f'$  é 0,42.

4. Os pontos do gráfico de  $f$  têm coordenadas  $(x, f(x))$

As abcissas dos pontos A e B satisfazem a condição  $f(x) = \frac{x}{2}$ , ou seja,  $\sqrt{x} - e^{-x} = \frac{x}{2}$ .

Para resolver graficamente esta equação, inserem-se na calculadora as expressões das funções  $f$  e  $g$

sendo  $g(x) = \frac{x}{2}$ .



$$a \approx 0,717$$

$$b \approx 3,920$$

**Resposta:** Conclui-se que  $b - a \approx 3,2$ .

### CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2k} \right)^n = \sqrt{e}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2k} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{n \left( 1 + \frac{2k}{n} \right)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n}{\left( 1 + \frac{2k}{n} \right)^n} = \frac{e^{-1}}{e^{2k}} = e^{-1-2k}$$

$$\text{Tem-se: } e^{-1-2k} = \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{-1-2k} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -1-2k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

**Opção:** (B)  $-\frac{3}{4}$

6.

6.1. Como a função  $f$  tem domínio  $\mathbb{R}$  e é contínua, não admite assíntotas verticais.

Seja  $y = mx + b$  a equação de uma assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 - \frac{1}{x}\right)}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5 - \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ , o gráfico de  $f$  admite a assíntota de equação  $y = 0$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$  tem-se: 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{5}{0^+} = +\infty.$$

Daqui se conclui que o gráfico de  $f$  não admite assíntota quando  $x \rightarrow -\infty$ .

**Resposta:** A única assíntota é a reta de equação  $y = 0$ .

6.2. 
$$f'(x) = \left(\frac{5x-1}{e^x}\right)' = \frac{5e^x - e^x(5x-1)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(5-5x+1)}{(e^x)^2} = \frac{6-5x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6-5x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 6-5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$$

Então,  $a = \frac{6}{5}$ .

$$f''(x) = \left(\frac{6-5x}{e^x}\right)' = \frac{-5e^x - e^x(6-5x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(-5-6+5x)}{(e^x)^2} = \frac{5x-11}{e^x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 5x-11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$$

Então,  $b = \frac{11}{5}$ .

$b - a = \frac{11}{5} - \frac{6}{5} = 1$ . Seja  $d$  a medida das diagonais de um quadrado de lado 1.

$$d^2 = 1 + 1, \text{ ou seja, } d = \sqrt{2}.$$

**Resposta:** A medida das diagonais de um quadrado de lado 1 é  $\sqrt{2}$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
$6-5x$	+	0	-
$e^x$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$x$	$-\infty$	$\frac{11}{5}$	$+\infty$
$5x-11$	-	0	+
$e^x$	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+
$f$	$\cap$	P. Inf.	$\cup$

$$7. \log_2(4a) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 a = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2(2^2) + \log_2 a = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 a = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2 a = -\frac{4}{3}$$

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \log_2 1 - \log_2\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log_2(a) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Opção: (A)  $\frac{2}{3}$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 2 + e^x}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - 1 + e^x}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ kx \rightarrow 0}} \frac{k(e^{kx} - 1)}{kx} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow k + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Opção: (C)  $\frac{3}{2}$

$$9. f(x) = x \ln\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right) + x \frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}} = \ln\left(\frac{3}{x}\right) - 1$$

Sejam  $m_r$  e  $m_s$  os declives, respetivamente, de  $r$  e de  $s$ .

$$m_r = f'\left(\frac{3}{e^3}\right) = \ln\left(\frac{3}{\frac{3}{e^3}}\right) - 1 = \ln(e^3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

Então,  $m_s = -\frac{1}{2}$ . A abscissa de  $B$  é solução da equação  $f'(x) = -\frac{1}{2}$ .

$$\ln\left(\frac{3}{x}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{e}}{e}$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{e}}\right) = \frac{3}{\sqrt{e}} \ln\left(\frac{3}{\frac{3}{\sqrt{e}}}\right) = \frac{3}{\sqrt{e}} \ln(\sqrt{e}) = \frac{3}{\sqrt{e}} \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{2e}$$

**Resposta:** As coordenadas do ponto  $B$  são  $\left(\frac{3\sqrt{e}}{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e}\right)$ .

**10.1.**  $P(x, f(x))$ .

Sabe-se que as coordenadas do ponto  $P$  satisfazem a condição  $f(x) = 2x$ .

$$\begin{aligned} f(x) = 2x &\Leftrightarrow xe^{-x} = 2x \Leftrightarrow x(e^{-x} - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\ln 2 \end{aligned}$$

Como as coordenadas de  $P$  são não nulas tem-se que a abcissa é igual a  $-\ln 2$ .

O declive da reta tangente ao gráfico no ponto  $P$  é igual a  $f'(-\ln 2)$ .

$$f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f'(-\ln 2) = e^{\ln 2} + \ln(2) \times e^{\ln 2} = 2 + 2\ln(2) = 2 + \ln 4.$$

**Resposta:** O declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$  é igual a  $2 + \ln 4$ .

**10.2.** Seja  $x$  a abcissa comum aos pontos  $A$  e  $B$ .

As ordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  são simétricas.

Assim, tem-se:  $f''(x) = -f(x)$

$$f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f''(x) = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$f''(x) = -f(x) \Leftrightarrow -2e^{-x} + xe^{-x} = -xe^{-x} \Leftrightarrow -2e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$$

$$2e^{-x}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, tem-se:

$$A(1, f(1)) = \left(1, e^{-1}\right) = \left(1, \frac{1}{e}\right)$$

$$B(1, f''(1)) = \left(1, -2e^{-1} + e^{-1}\right) = \left(1, -e^{-1}\right) = \left(1, -\frac{1}{e}\right)$$

**Resposta:**  $A\left(1, \frac{1}{e}\right)$  e  $B\left(1, -\frac{1}{e}\right)$

11. Sabe-se que:

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$
- $f(2) = 0$
- $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - f(x)\right)' < 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} - f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)} - 1) < 0$$

Cálculo auxiliar

$$e^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$e^{f(x)} - 1$	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 2[$$

**Resposta:**  $x \in ]-\infty, 2[$

## FORMULÁRIO

### GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:**  $\alpha r$

( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  
 $r$  – raio)

#### Áreas de figuras planas

**Polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

**Setor circular:**  $\frac{\alpha r^2}{2}$

( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

#### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$

( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4\pi r^2$

( $r$  – raio)

#### Volumes

**Pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### PROGRESSÕES

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

### COMPLEXOS

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis}(n\theta)$  ou  $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$  ou  $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

### PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

### REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )