Novo Espaço – Matemática A, 10.º ano

Proposta de teste de avaliação [novembro – 2022]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. Relativamente a um referencial o.n. *Oxy*, considera os pontos $A(-2, 5)$, $B(3, -7)$ e $C\left(3+k^2, 6-2k\right)$, com $k \in \mathbb{R}$.

1.1. Representa, através de uma condição, a reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa no ponto *A*.

1.2. Indica as coordenadas do ponto que é:

a) a projeção ortogonal do ponto *B* sobre o eixo das abcissas;

b) simétrico do ponto *A* relativamente à reta que passa no ponto *B* e que é paralela ao eixo das abcissas.

1.3. Determina uma equação da circunferência que admite [*AB*] como diâmetro.

1.4. Determina o(s) valor(es) de *k* para os quais:

a) o ponto *C* pertence à reta que passa no ponto *B* e é paralela ao eixo das abcissas;

b) o ponto *C* pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2. Na figura está representada uma etiqueta natalícia, representada pelo retângulo [*ABCD*].

Fixada uma unidade, sabe-se que:

- a área do retângulo [*ABCD*] é igual a 8;
- $\overline{CD} = 3+\sqrt{5}$

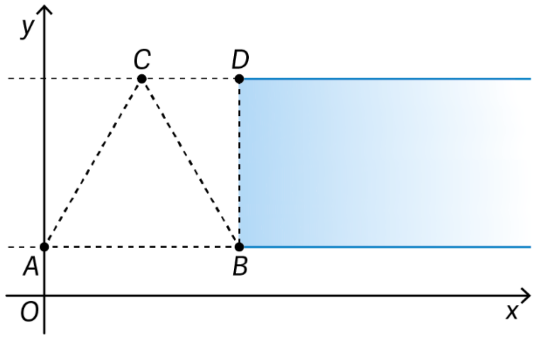
Qual dos seguintes valores corresponde à medida do perímetro do retângulo?

(A) $18-2\sqrt{5}$ **(B)** $6-2\sqrt{5}$ **(C)** $22+2\sqrt{5}$ **(D)** $6+4\sqrt{5}$

3. No referencial o.n. *Oxy* da figura, estão representados os pontos *A*, *B* e *C*, vértices de um triângulo equilátero. Considera que a unidade de medida coincide com a unidade do referencial.

Sabe-se que:

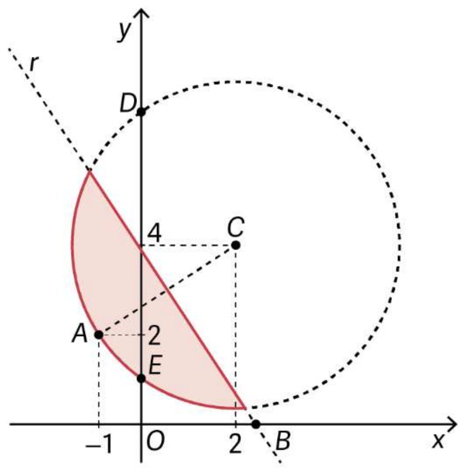
- o ponto *A* tem coordenadas $(0, 1)$;
- A reta *AB* é paralela ao eixo *Ox*;
- A medida do perímetro do triângulo [*ABC*] é 12;
- A reta *BD* é perpendicular à reta *AB*.



Define por uma condição a região colorida da figura.
Explica o teu raciocínio, apresentando todos os cálculos que justifiquem a tua resposta.

4. No referencial da figura está representada uma circunferência de centro *C* e que passa no ponto *A*.
Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas $(-1, 2)$;
- o ponto *C* tem coordenadas $(2, 4)$;
- a reta *r* é a mediatriz do segmento de reta [*AC*];
- os pontos *D* e *E* são pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas.



4.1. Mostra que a equação reduzida da reta *r* é:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{4}$$

4.2. Sabe-se que o ponto *B* é o ponto de interseção da reta *r* com o eixo das abcissas. Determina as suas coordenadas.

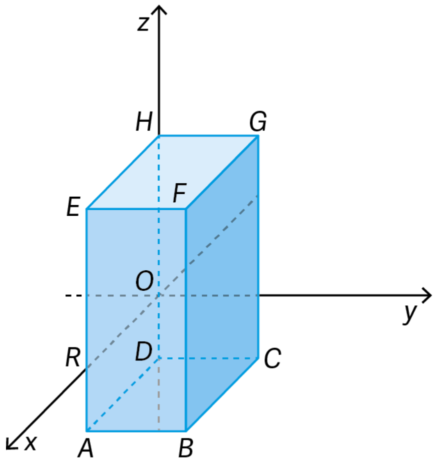
4.3. Determina as coordenadas dos pontos *D* e *E*.

4.4. Representa através de uma condição a região colorida da figura.

5. Representa, num referencial o.n. *Oxy*, o seguinte conjunto de pontos:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - 1| > 2 \ \wedge \ x^2 + (y-1)^2 \leq 9\right\}$$

6. No referencial o.n. *Oxy* da figura, está representado um paralelepípedo retângulo.
A face [*EADH*] está contida no plano *xOz* e sabe-se que [*EROH*] é um quadrado, sendo $H(0, 0, 4)$ e $C(0, 2, -2)$.



6.1. Escreve uma condição que defina:

a) o plano *ABC*;

b) a reta *BF*;

c) a reta *EH*.

6.2. Considera um plano definido por uma condição do tipo:

$$z = k - \frac{5k-2}{3} \text{ , com } k \in \mathbb{R}$$

Determina o valor de *k* para o qual o plano divide o sólido em dois paralelepípedos de igual volume.

FIM

Questões	**1.1.**	**1.2. a)**	**1.2. b)**	**1.3.**	**1.4. a)**	**1.4. b)**	**2.**	**3.**		
Cotação (pontos)	5	5	10	15	15	15	10	20		
Questões	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.**	**6.1. a)**	**6.1. b)**	**6.1. c)**	**6.2.**	**Total**
Cotação (pontos)	15	10	15	10	15	5	10	10	15	**200**

1.1. $x=-2$

1.2.

a) $(3,0)$

b) $(-2,-19)$

1.3. Sejam:

M: ponto médio de [*AB*]

r: raio da circunferência de diâmetro [*AB*]

As coordenadas de *M* são: $\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5-7}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$$r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{(3+2)^2+(-7-5)^2}}{2}=\frac{\sqrt{169}}{2}=\frac{13}{2}$$

Equação da circunferência de diâmetro [*AB*]: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{169}{4}$

1.4.

a) Reta que passa no ponto *B* e é paralela ao eixo das abcissas: $y=-7$

$$6-2k=-7 \Leftrightarrow -2k=-13 \Leftrightarrow k=\frac{13}{2}$$

b) Bissetriz dos quadrantes ímpares: $y=x$

$$6-2k=3+k^2 \Leftrightarrow -k^2-2k+3=0 \Leftrightarrow k=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow k=-3 \vee k=1$$

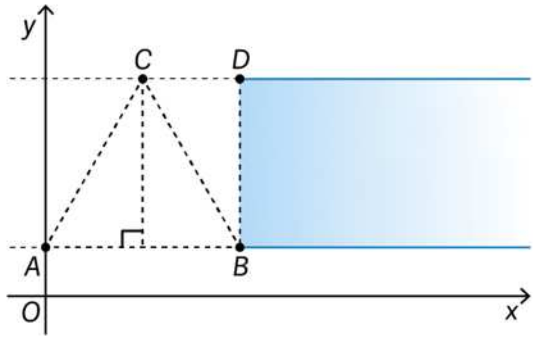
2. $\overline{AD}=\frac{8}{3+\sqrt{5}}=\frac{8\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{8\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=2\left(3-\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}$

Seja *P* a medida do perímetro de [*ABCD*]. Então:

$P=2\left(6-2\sqrt{5}\right)+2\left(3+\sqrt{5}\right)=12-4\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}=18-2\sqrt{5}$

Opção (A)

3. $\overline{AB} = \frac{12}{3} = 4$. Então, B tem coordenadas (4, 1).



A medida da altura do triângulo [*ABC*] é igual a $\overline{BD}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{BD}^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{12} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{3}$

Assim, D tem coordenadas $\left(4\ ,\ 1+2\sqrt{3}\right)$.

A região colorida é formada pelos pontos (x, y) tais que:

$$1 \leq y \leq 1+2\sqrt{3} \wedge x > 4$$

4.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à mediatriz do segmento de reta [*AC*].

$\overline{AP} = \overline{CP} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 6x + 4y = 15 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{4}x + \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{4}$

4.2. $B(x, 0)$

$0 = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{4} \Leftrightarrow 0 = -6x + 15 \Leftrightarrow 6x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Logo, as coordenadas do ponto B são $\left(\frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$.

4.3. Os pontos *D* e *E* são pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas, logo são do tipo $(0,\ y)$ e a sua distância a C é igual à medida do raio.

A medida do raio da circunferência é $\overline{AC}$, sendo $\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$

$\sqrt{(-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow 4 + y^2 - 8y + 16 = 13 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow y = 7 \vee y = 1$

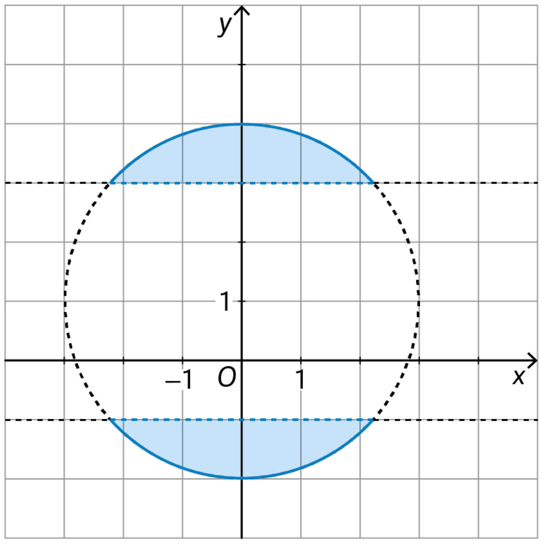
Como a ordenada de *D* é maior do que a de *E*, então: *D*(0, 7) e *E*(0 , 1)

4.4. $r = \overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$

$(x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 13 \quad \wedge \quad y \leq -\frac{3}{2}x + \frac{15}{4}$

5. $|y-1|>2 \Leftrightarrow y-1>2 \ \vee \ y-1<-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y>3 \ \vee \ y<-1$

Então , $|y-1|>2 \ \wedge \ x^2+(y-1)^2 \leq 9$
$\Leftrightarrow (y>3 \ \vee \ y<-1) \ \wedge \ x^2+(y-1)^2 \leq 9$



6.1.

a) $z=-2$
b) $x=4 \wedge y=2$
c) $y=0 \wedge z=4$

6.2. $D(0,0,-2)$ e $\overline{DH}=6$
O plano paralelo ao plano *Oxy* que divide o paralelepípedo em dois com igual volume é o plano $z=-2+3 \Leftrightarrow z=1$

Então: $k-\frac{5k-2}{3}=1 \Leftrightarrow 3k-5k+2=3 \Leftrightarrow -2k=1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$

FIM

Questões	1.1.	1.2. a)	1.2. b)	1.3.	1.4. a)	1.4. b)	2.	3.		
Cotação (pontos)	5	5	10	15	15	15	10	20		
Questões	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.**	**6.1. a)**	**6.1. b)**	**6.1. c)**	**6.2.**	**Total**
Cotação (pontos)	15	10	15	10	15	5	10	10	15	**200**