Escola Secundária de Francisco Franco (2014/2015)

www.esffranco.edu.pt

7.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

3.º Período 03/06/15 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

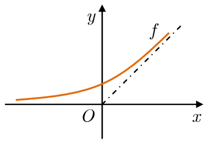
Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, contínua em todo o seu domínio.

Tal como é sugerido pela figura, o gráfico de f admite duas assíntotas: o eixo Ox e a bissetriz dos quadrantes ímpares.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{f(x)}-\frac{f(x)}{x}\right)$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

2. Dado o número real a, seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja segunda derivada é dada por $g''(x) = 2^{x+a}$

Qual das seguintes é uma afirmação necessariamente verdadeira?

(A) A função g é crescente.

(B) A função g é decrescente.

(C) O gráfico da função g não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função g tem um ponto de inflexão de abcissa a

3. Considere o subconjunto de $\mathbb{C}$, $A = \{z : z = a + bi\}$ com $a, b \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Escolhem-se, ao acaso, dois quaisquer números de A

Sabe-se que os dois números escolhidos são imaginários puros.

Qual é a probabilidade de as suas imagens geométricas pertencerem ao semieixo positivo?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{7}$

4. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $z = 3 - i$ e o número real x

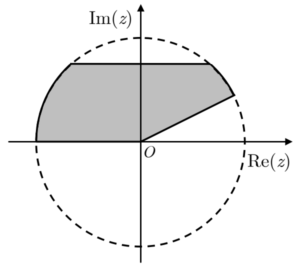
Sabe-se que o produto dos dois números é igual a 2

Qual é o valor de x?

(A) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ **(B)** $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$ **(C)** $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ **(D)** $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

5. Na figura está representada, no plano complexo, uma parte de um círculo de centro na origem do referencial.

Qual das condições seguintes pode definir a região sombreada, incluindo a fronteira?



(A) $|z| \le 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \ge 2\operatorname{Re}(z) \wedge 0 \le \operatorname{Im}(z) \le 3$

(B) $|z| \le 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \ge \frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \wedge 0 \le \operatorname{Im}(z) \le \frac{3}{2}$

(C) $|z| \le 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \ge 2\operatorname{Re}(z) \wedge 0 \le \operatorname{Im}(z) \le \frac{3}{2}$

(D) $|z| \le 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \ge \frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \wedge 0 \le \operatorname{Im}(z) \le 3$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e o número complexo $w = 1-\sqrt{3}\,i$

Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

1.1. Verifique se o número $\frac{w}{i^{33}}$ é igual ao simétrico de w ou ao simétrico do conjugado de w

1.2. Determine, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas de $\frac{2w^5}{i\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ e calcule a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas dessas raízes.

1.3. Dado $\alpha \in [-\pi, 2\pi]$, determine os valores de α de modo que a imagem geométrica do complexo $w\,\mathrm{cis}(\alpha)$ pertença ao semieixo negativo imaginário.

2. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, considere $z_1 = \mathrm{cis}(\alpha)$ e $z_2 = 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\times z_1$

Mostre que $z_2 - z_1 = \cos(2\alpha)\mathrm{cis}(\alpha+\pi)$

3. Considere a f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+3}-2x-7}{2x+6} & \text{se } x < -3 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = -3 \\ \operatorname{sen}(6x) + 3\sqrt{2}x & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

3.1. Averigúe se f é contínua à esquerda do ponto de abcissa -3

3.2. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$

Na sua resposta, deve apresentar:

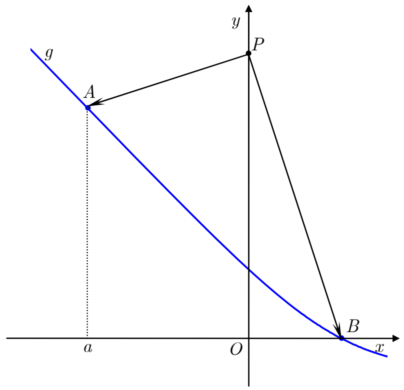
- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

4. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^2}{2}\right) - x$

4.1. O gráfico da função g tem uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$

Sem usar a calculadora, determine a sua equação.

4.2. No referencial o. n. xOy da figura está parte do gráfico de g e os pontos A, B e P



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de g e tem abcissa negativa a
- o ponto B pertence ao gráfico de g e tem ordenada 0
- o ponto P pertence ao eixo Oy e tem ordenada 6

Tal como a figura sugere, os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- determinar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (30 pontos)	Cada resposta certa: 6	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (170 pontos)				
	1.....64 1.1.....17 1.2.....26 1.3.....21	2.....21	3.....47 3.1.....21 3.2.....26	4.....38 4.1.....21 4.2.....17

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:
αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (*r – raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Progressões

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira
http://roliveira.pt.to