Escola Secundária de Francisco Franco (2014/2015)

www.esffranco.edu.pt

# 6.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

3.º Período 29/04/15 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

## Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

**1.** Uma empresa comercializa embalagens de camarões com um certo número de exemplares.


Admita que a variável $X$, que representa o número de camarões nessas embalagens, segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio $50$ e desvio padrão $5$

A Brigite tem 5 embalagens de camarões desse tipo e vai tirar, ao acaso, duas embalagens para o jantar.

Qual é a probabilidade, com três casas decimais, de ambas terem entre $45$ e $50$ camarões?

**(A)** $0{,}149$ **(B)** $0{,}235$ **(C)** $0{,}289$ **(D)** $0{,}333$

**2.** Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos possíveis de um espaço de resultados $\Omega$ tais que $P(A \mid B) = P(B)$

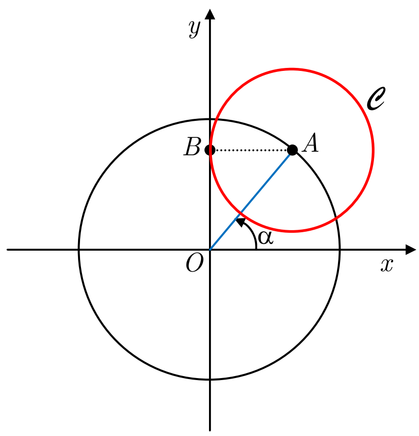
Qual das seguintes afirmações pode ser verdadeira?

**(A)** $P(A) = 0,4 \wedge P(B) = 0,8$ **(B)** $P(B) = 0,64 \wedge P(A \cap B) = 0,8$

**(C)** $P(B) = 0,5 \wedge P(A \cap B) = 0,5$ **(D)** $P(B) = 0,8 \wedge P(A \cap B) = 0,64$

**3.** Na figura estão representados, em referencial o.n. $xOy$:

- o círculo trigonométrico;
- o raio $[OA]$ do círculo;
- a circunferência $\mathscr{C}$ de centro $A$ e raio $[AB]$




Tal como a figura sugere, o ponto $A$ pertencente ao primeiro quadrante, o ponto $B$ pertencente ao eixo $Oy$ e o ângulo de amplitude $\alpha$, assinalado na figura, tem por lado origem o semieixo positivo $Ox$ e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da circunferência $\mathscr{C}$ em função de $\alpha$ ?

**(A)** $\pi \operatorname{sen} \alpha$ **(B)** $2\pi \operatorname{sen} \alpha$ **(C)** $\pi \cos \alpha$ **(D)** $2\pi \cos \alpha$

**4.** Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x^2 + \ln x^4 + \ln x^6 + \cdots + \ln x^{20}}{\ln 5}$

Qual das seguintes expressões pode também definir a função $f$?

**(A)** $110 \log_5 x$ **(B)** $110 \log_5 \left(x^2 + x^{20}\right)$ **(C)** $\frac{10 \log x}{\ln 5}$ **(D)** $\frac{\log e^x}{\ln 5}$

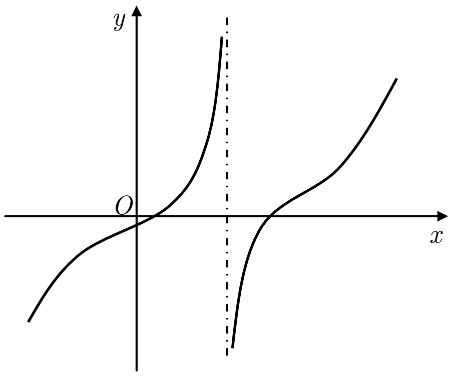
**5.** Seja $(x_n)$ a sucessão definida por $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

De uma certa função $f$, derivável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

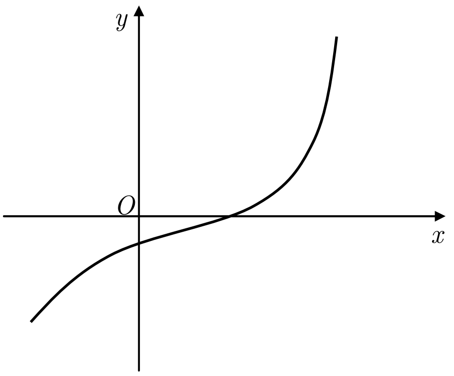
- $\lim f(x_n) = 0$
- $f\,'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função $f$?

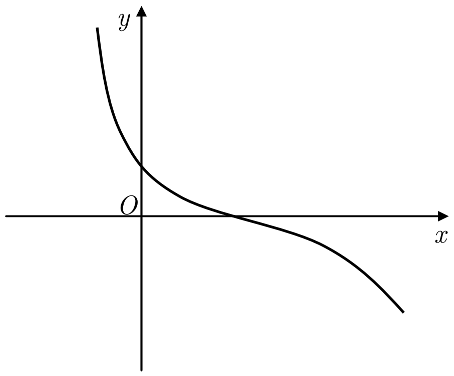
**(A)**



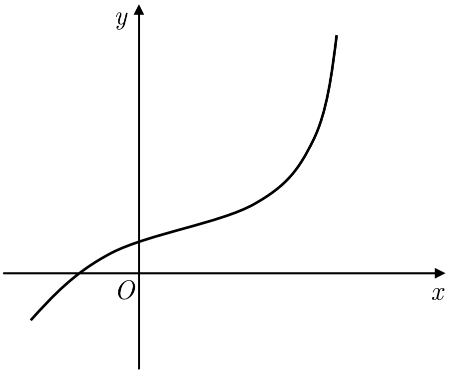

**(B)**




**(C)**




**(D)**



## Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Dado um número real positivo $k$, seja $f$ a função, contínua em $\mathbb{R}^+$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x\cos\left(4-2x+\frac{\pi}{2}\right)}{4x-2x^2} & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ \sqrt{\ln(x+k)} - 5 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes usando métodos analíticos.

**1.1.** Mostre que, independentemente do valor de $k$, não existe nenhum ponto do gráfico de $f$ em $]2,+\infty[$ onde a reta tangente seja horizontal.

**1.2.** Determine o valor de $k$

**2.** Considere a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ , definida por $g(x) = \frac{e^{2x+5}}{x+5}$

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** usando métodos analíticos.

**2.1.** Verifique que o gráfico da função $g$ tem apenas uma assíntota não vertical e indique a sua equação.

**2.2.** Estude a função $g$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

**2.3.** Considere agora a função, definida em $[-2,0]$, por $h(x) = e^{-1-2x}$

Considere também, num referencial o. n. $xOy$, os pontos $A$ e $B$ tais que:

- o ponto $A$ pertence ao gráfico de $h$ e ao eixo $Oy$
- o ponto $B$ pertence aos gráficos de $g$ e de $h$

Recorrendo à calculadora gráfica, determine o comprimento do segmento $[AB]$

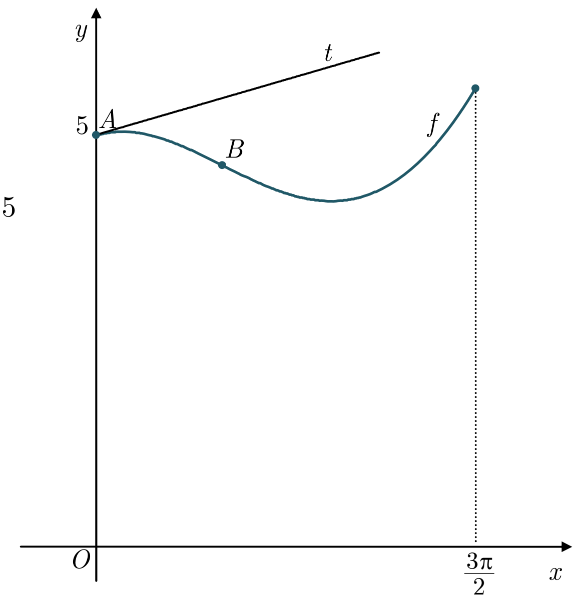
Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções $g$ e $h$ , devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos $A$ e $B$
- calcular as coordenadas relevantes de pontos, com arredondamento às milésimas;
- calcular a distância pedida, com arredondamento às décimas.

**3.** Considere o gráfico da função $f$ representada na figura ao lado.

Sabe-se que:

- o domínio de $f$ é $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
- a derivada de $f$ é dada por $f'(x) = 2\pi - x - 6\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
- o ponto $A$ pertence ao gráfico de $f$ e ao eixo $Oy$ e tem ordenada $5$
- $B$ pertence ao gráfico de $f$ e é um ponto de inflexão
- $t$ é a semireta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $A$

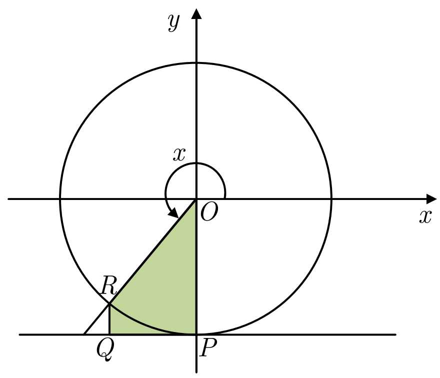



Resolva os itens seguintes usando métodos analíticos.

**3.1.** Determine a equação reduzida de $t$

**3.2.** Determine a abcissa do ponto $B$

**4.** Considere o trapézio retângulo $[OPQR]$ representado no círculo trigonométrico da figura.




Tal como a figura sugere:

- O ponto $O$ é a origem do referencial;
- O ponto $P$ pertence ao semieixo negativo $Oy$ e à circunferência;
- O ponto $Q$ está no terceiro quadrante e tem a mesma ordenada que $P$
- O ponto $R$ está no terceiro quadrante e pertence à circunferência;
- A reta $QR$ é paralela ao eixo $Oy$
- $x$ é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo $Ox$ e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}R$
- $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Seja $f(x)$ a área do trapézio $[OPQR]$ em função de $x$

**4.1.** Mostre que $f(x) = \left(\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1 + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

**4.2.** Dado um número real $a$ tal que $a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = -\sqrt{8}$

Sem usar a calculadora, determine $f(a)$

FIM

COTAÇÕES

| | | |
|---|---|---|
| Grupo I<br>(30 pontos) | Cada resposta certa: 6 | Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grupo II<br>(170 pontos) | 1....36<br>1.1....15<br>1.2....21 | 2....57<br>2.1....21<br>2.2....21<br>2.3....15 | 3....35<br>3.1....14<br>3.2....21 | 4....42<br>4.1....21<br>4.2....21 |

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**
$\alpha r$ ($\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; $r$ – *raio*)

**Área de um polígono regular**: *Semiperímetro* × *Apótema*

**Área de sector circular**:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; $r$ – *raio*)

**Área lateral de um cone**: $\pi r g$ ($r$ – *raio da base*; $g$ – *geratriz*)

**Área de uma superfície esférica**: $4\pi r^2$ ($r$ – *raio*)

**Volume de uma pirâmide**: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

**Volume de um cone**: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

**Volume de uma esfera**: $\frac{4}{3}\pi r^3$

## Progressões

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética**: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica**: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

## Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

## Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \dots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira
http://roliveira.pt.to