

2.º Período

11/03/15

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Considere, no triângulo de Pascal:

- a linha n em que o segundo elemento é a e o terceiro é 300
- a linha $n + 1$ em que o terceiro elemento é $13a$

Indique o valor de a

(A) 23

(B) 24

(C) 25

(D) 26

2. “Depois ergueu a cabeça, para murmurar, como ao acaso:
– Aquele rapazito é esperto...”

OS MAIAS, Eça de Queirós

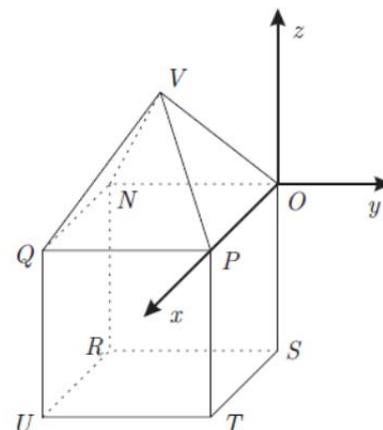
Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox

Escolhem-se, ao acaso, três vértices diferentes do poliedro.

Qual é a probabilidade de eles definirem um plano que não contenha nenhuma das faces do poliedro?



(A) $\frac{5}{9}$

(B) $\frac{1}{9}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{1}{7}$

Adaptado do Teste Intermédio do 11.º ano, janeiro de 2011

3. Seja a um número real diferente de 0

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{ax})}{2e^{ax} - 2}$?

(A) 0

(B) $+\infty$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{e}$

4. Seja k um número real positivo e seja f a função **contínua** em \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + \log_3 k & \text{se } x \neq -5 \\ -1 & \text{se } x = -5 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

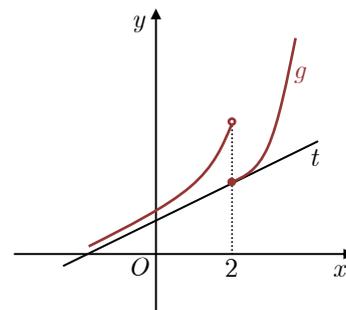
- (A) 81 (B) 256 (C) 625 (D) 1296

5. Considere, na figura ao lado, parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R}

Tal como essa figura sugere:

- a função g é contínua à direita do ponto de abscissa 2 e descontínua à sua esquerda;
- a reta t é uma assíntota oblíqua do gráfico de g quando x tende para $-\infty$ e contém a semitangente à direita do ponto de abscissa 2

Sabendo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$, pode-se concluir que:



- (A) $g'(2^-) = +\infty$ e $g'(2^+) = \frac{1}{2}$ (B) $g'(2^-) = -\infty$ e $g'(2^+) = \frac{1}{2}$
- (C) $g'(2^-) = +\infty$ e $g'(2^+) = 1$ (D) $g'(2^-) = -\infty$ e $g'(2^+) = 1$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Uma floresta foi atingida por uma praga.

Admita que a área, em **milhares** de hectares, da região afetada por essa praga é dada por

$$A(t) = \log_4(t^2 + 4t + 3) - \log_4(t^2 + 3) \quad (t \geq 0)$$

(Considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início da praga.)

- 1.1. Mostre que $A(t) = \log_4 \left(1 + \frac{4t}{t^2 + 3} \right)$
- 1.2. Determine a taxa média de variação da função A em $[0, 2]$
 Apresente o resultado com uma casa decimal e interprete-o no contexto do problema (se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais).
- 1.3. Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada.
 Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada?
 Na sua resposta deve:
- escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;
 - resolver analiticamente essa inequação;
 - apresentar o valor pedido.

2. Considere a função, de domínio \mathbb{R} , definida por
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(5x+2) - \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

2.1. Sem usar a calculadora, estude a função g quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

2.2. Considere, num referencial o. n. xOy , o gráfico da função g em $[-2,2]$, a reta r de equação $y = 2$ e o retângulo $[ABCD]$

Sabe-se que:

- A pertence ao primeiro quadrante e é um ponto de interseção entre o gráfico de g e a reta r
- B pertence ao segundo quadrante e é outro ponto de interseção entre o gráfico de g e a reta r
- C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa que B
- D pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa que A

Determine a área do retângulo $[ABCD]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função g , devidamente identificado, incluindo o referencial;
- reproduzir a reta r
- reproduzir o retângulo $[ABCD]$
- calcular as coordenadas relevantes de pontos, com arredondamento às milésimas;
- calcular a área pedida, com arredondamento às décimas.

3. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x - 2) + 4 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Usando apenas **processos analíticos**, resolva os itens seguintes.

3.1. Mostre que $f'(3) = 1$

3.2. Prove que, no intervalo $]1,6[$, o gráfico de f intersesta, pelo menos uma vez, a bissetriz dos quadrantes ímpares.

4. Considere duas funções f e g , ambas de domínio \mathbb{R}^-

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 3 - 2x$ é assíntota do gráfico da função f
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^3 e^x + 2x$

Mostre que o gráfico da função g tem uma assíntota horizontal e indique a sua equação.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (30 pontos)	Cada resposta certa: 6	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	------------------------	---

Grupo II (170 pontos)	1.....57	2.....50	3.....40	4.....23
	1.1.....17	2.1.....27	3.1.....23	
	1.2.....17	2.2.....23	3.2.....17	
	1.3.....23			

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$