

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

2.º Período 28/01/15 Duração: 90 minutos  
Nome: N.º:  
Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ :

- a reta  $r$  de condição  $x = y = \frac{z}{3}$
- os vetores  $\vec{a}(2, 2, 6)$ ,  $\vec{b}(2, 0, 6)$ ,  $\vec{c}(-3, -3, -9)$ ,  $\vec{d}(1, 1, 3)$  e  $\vec{e}(3, 3, 3)$

Escolhem-se três vetores distintos ao acaso.

Qual é a probabilidade de terem todos a direcção da reta  $r$ ?

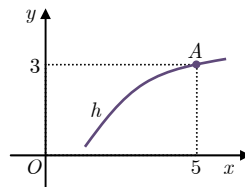
- (A) 0 (B)  $\frac{1}{10}$  (C)  $\frac{1}{5}$  (D) 1

2. Na figura está parte da representação gráfica da função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $h(x) = \log_k x$ , com  $k > 1$

$A$  é o ponto do gráfico de  $h$  de coordenadas  $(5, 3)$

Qual é o valor de  $k$ ?

- (A)  $\sqrt[3]{3}$  (B)  $\sqrt[3]{5}$  (C)  $\sqrt[3]{3}$  (D)  $\sqrt[3]{5}$



3. Seja  $D$  o domínio da função definida por  $f(x) = \ln(e^x - 17)$

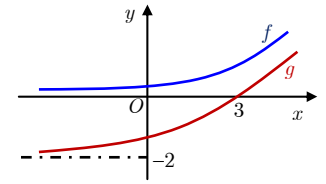
Indique, de entre os seguintes, o conjunto  $D$

- (A)  $[\sqrt{8}, e^8]$  (B)  $[\ln 17, e^{17}]$  (C)  $[\sqrt{8}, +\infty[$  (D)  $[\ln 17, +\infty[$

4. Na figura estão partes dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ , ambas contínuas em  $\mathbb{R}$

Tal como sugere a figura:

- o contradomínio de  $f$  é  $]0, +\infty[$
- o contradomínio de  $g$  é  $] - 2, +\infty[$
- $y = 0$  é a equação da assíntota do gráfico de  $f$
- $y = -2$  é a equação da assíntota do gráfico de  $g$



Considere a sucessão definida por  $a_n = 3(1 - 5^{1000-n})$

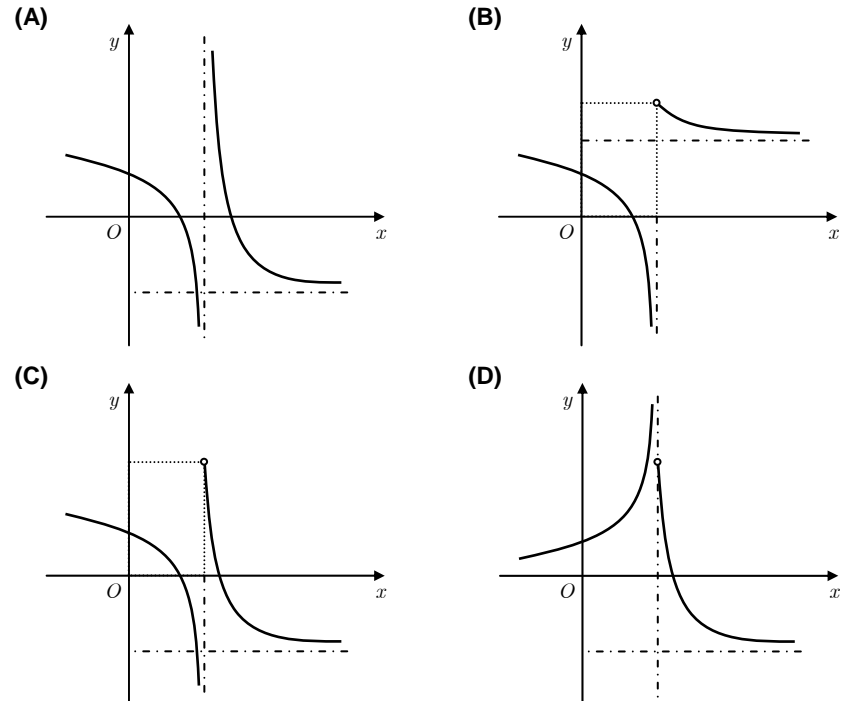
Indique o valor de  $\lim \left(\frac{f}{g}\right)(a_n)$

- (A)  $+\infty$  (B)  $-\infty$  (C) 0 (D)  $-2$

5. De uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , sabe-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$$

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $g$ ?



## Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Nas eleições para liderar o partido político PSFP, vai haver seis candidatos. Sabe-se que dois deles têm o mesmo nome próprio, Miguel.

Para evitar confusões na hora de os militantes do PSFP votarem, optou-se por fazer um boletim de voto com cada nome na horizontal mas **de modo que os dois candidatos com mesmo nome próprio não fiquem juntos**. Ao lado está um exemplar de um boletim de voto.

- 1.1. Mostre que existem exatamente 480 boletins diferentes nas condições do enunciado.

- 1.2. Escolhe-se, ao acaso, um desses boletins nas condições anteriores.

Qual é a probabilidade de os candidatos com o mesmo nome próprio ficarem nos extremos do boletim?

PSFP	
Eleição da comissão política	
Sérgio Aguado .....	<input type="checkbox"/>
Miguel Bicho .....	<input type="checkbox"/>
João Triste .....	<input type="checkbox"/>
Manuel Botas .....	<input type="checkbox"/>
Jaime Arcanjo .....	<input type="checkbox"/>
Miguel Sargo .....	<input type="checkbox"/>

2. Num parque natural, há uma espécie protegida de lincos afetada por uma doença.

Sabe-se que,  $t$  meses após o início de 2015:

- o número de exemplares de lincos machos será dado, aproximadamente, pelo modelo

$$m(t) = \frac{500}{3+2e^{0,16t}}, \quad t \in [0, 14]$$

- o número de exemplares de lincos fêmeas será dado, aproximadamente, pelo modelo

$$f(t) = \frac{350}{2,1+2,8e^{0,08t}}, \quad t \in [0, 14]$$

- 2.1. Pensa-se vacinar, ao acaso, 10 dos lincos existentes no início de 2016.

Qual é a probabilidade de 5 deles serem machos e os outros fêmeas?

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

- 2.2. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, indique em que mês de 2015 se prevê que o número de exemplares de lincos machos seja igual ao de lincos fêmeas.

Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, três casas decimais.

3. Considere a função definida por  $f(x) = \frac{1}{\log_3(2x+6)}$

- 3.1. Caracterize a função inversa de  $f$

Na sua resposta deve:

- indicar o domínio da função  $f^{-1}$
- indicar o contradomínio da função  $f^{-1}$
- apresentar  $f^{-1}(x)$  de forma simplificada.

- 3.2. Mostre que o ponto de coordenadas  $(5, \log_4(\sqrt{3}))$  pertence ao gráfico de  $f$

4. Considere a função  $g$ , de domínio  $[-7, +\infty[$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+7}}{x^3+4x^2+6x+9} & \text{se } -7 \leq x < -3 \\ \frac{e^{x+3}}{x^2+6} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

- 4.1. Sem recorrer à calculadora, averigüe se existe  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$

- 4.2. “Cópia minuciosa de Pequim, a cidade [de Mil Ventos] foi buscar à capital o traçado retangular.”  
A JOGADORA DE GO, Shan Sa

Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $g$  no domínio  $[-3, 0]$

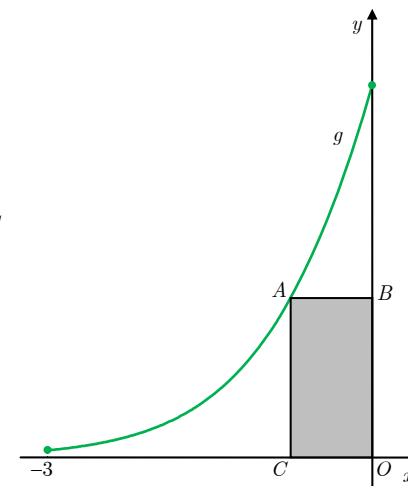
Considere que um ponto  $A$  se desloca ao longo desse gráfico e que  $A$  tem abcissa negativa.

Para cada posição do ponto  $A$ , considere o retângulo  $[ABOC]$ , em que o ponto  $C$  pertence ao eixo das abcissas e o ponto  $B$  pertence ao eixo das ordenadas.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a(s) abcissa(s) do ponto  $A$  para a qual a área do retângulo  $[ABOC]$  é 1

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do retângulo  $[ABOC]$  em função da abcissa do ponto  $A$
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a(s) abcissa(s) do ponto  $A$  com arredondamento às centésimas.



FIM

### COTAÇÕES

<b>Grupo I (30 pontos)</b>	Cada resposta certa: 6	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	------------------------	---

<b>Grupo II (170 pontos)</b>	1..... <b>34</b>	2..... <b>44</b>	3..... <b>44</b>	4..... <b>48</b>
	1.1.....14	2.1.....20	3.1.....24	4.1.....24
	1.2.....20	2.2.....24	3.2.....20	4.2.....24