

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

1.º Período 10/12/14 Duração: 90 minutos
Nome: N.º:
Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Doze amigos vão passear em três automóveis diferentes. Sabe-se que cada automóvel leva, no máximo, cinco pessoas e, no mínimo, três. De quantas maneiras diferentes podem ficar distribuídos os doze amigos nos três automóveis?
- (A) ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 3!$ (B) ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 5!$
(C) ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 3!$ (D) ${}^{12}C_4 \times {}^{12}C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^{12}C_4 \times {}^{12}C_3$

2. Considere a progressão geométrica (a_n) de primeiro termo 1 e razão $\sqrt{2}$. A Efigénia vai escrever num papel, ao acaso, cada um dos nove primeiros termos de (a_n) . Qual é a probabilidade de ela começar e acabar com um termo que é um número inteiro?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{5}{18}$

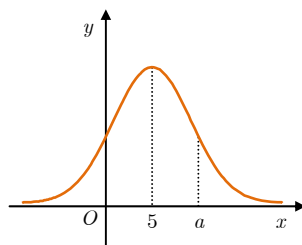
3. Na figura ao lado, está representada a Curva de Gauss referente a uma variável aleatória X , com distribuição Normal $N(5, \sigma)$, e um número a maior que 5

Sabe-se que:

- $P(X < 0) = P(X > a)$
- $P(0 < X < a) = 0.9$

Qual dos números seguintes pode ser o valor de σ ?

- (A) -1,5 (B) 0 (C) 2,5 (D) 3



4. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{e^{x+1}}$

Qual das seguintes expressões pode também definir f ?

- (A) $e^{-x} \left(2 + \frac{1}{e} \right)$ (B) $e^{-x-1} \left(1 + \frac{2}{e} \right)$ (C) $e^{-x-1} (2 + e)$ (D) $e^{-x} (2 + e)$

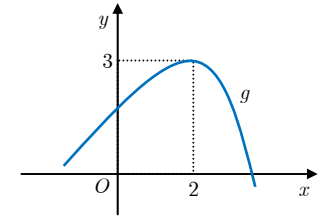
5. No referencial o.n. xOy do lado, está parte do gráfico da função g

Tal como é sugerido pela figura, a função g tem um máximo absoluto igual a 3, para $x = 2$

Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = 5^{g(x)}$

Qual é o contradomínio da função h ?

- (A) $]0, 25]$ (B) $]0, 125]$
(C) $] - \infty, 125]$ (D) $[25, +\infty[$



Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Decorreram em novembro, em Sochi (Rússia), as partidas para disputar o título de campeão do mundo de xadrez, entre o campeão de 2013, o norueguês Magnus Carlsen, e o campeão anterior, o indiano Viswanathan Anand.



Admita que, no início de cada partida de xadrez entre os dois, a probabilidade de Carlsen ganhar era de 0,4

Estavam previstas 12 partidas para se determinar o campeão do mundo.

Usando métodos analíticos, determine a probabilidade de Carlsen ganhar exatamente 3 partidas.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado n vezes, $n > 2$

2.1. Admita que $n = 4$

Suponha que se escreve um número com quatro algarismos: no primeiro lançamento, sai o algarismo das unidades, no segundo lançamento, sai o das dezenas, no terceiro o das centenas e, no quarto, o dos milhares.

Sabendo que o número obtido é inferior a 5000, qual é a probabilidade de ele ter os algarismos todos diferentes?

2.2. Considere o acontecimento D : «Saem exatamente dois números pares não primos nos n lançamentos»

Mostre que

$$P(D) = \frac{{}^n A_2 \times 2^{n-3}}{3^n}$$

3. “O próprio duque [de Borgonha] o havia aprendido à sua custa quando exigira que a moeda que circulava na Flandres fosse fundida para que se cunhassem novas moedas de ouro e de prata, retendo, de passagem, um terço do peso desses escudos em benefício do tesouro borgonhês. A reação dos habitantes de Gand não se havia feito esperar: cortejos de pessoas aos gritos, um assalto à prisão levado a cabo pelos tecelões, o massacre dos almotacés. Finalmente, o duque havia sido constrangido a refrear o seu apetite e a não reter nos seus cofres mais do que um sétimo do peso das moedas flamengas.”

O MENINO DE BRUGES, Gilbert Sinoué

O Isidoro tem, no bolso, oito moedas, algumas de 2 euros e outras de 1 euro. Sabe-se que:

- O Isidoro tem, pelo menos, duas moedas de 1 euro;
- O número de moedas de 2 euros é superior ao número de moedas de 1 euro.

Ele retira, simultaneamente e ao acaso, quatro moedas do bolso.

Seja X o número de moedas de 2 euros retiradas pelo Isidoro.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

I)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$

II)

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

III)

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

IV)

x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar a tabela de distribuição de probabilidades de X
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

4. Dados dois números reais a e b , sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	-1	0	2	a
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	b

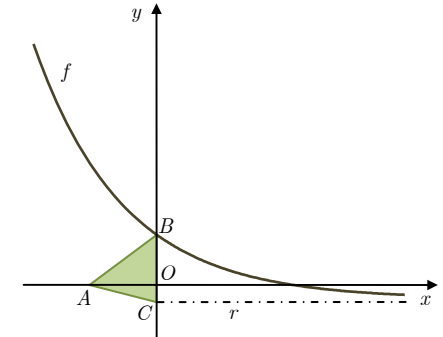
Sabendo que o valor médio de X é igual a $P(X = 0)$, determine, usando métodos analíticos, o valor de a

5. No referencial o.n. xOy ao lado está representada parte do gráfico da função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = 2^{-x} - k, \text{ em que } k > 0$$

Em relação aos elementos da figura, sabe-se que:

- A reta r é a assíntota do gráfico de f
- O ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa -1
- O ponto B pertence ao eixo Oy e ao gráfico de f e tem ordenada $\frac{3}{4}$
- O ponto C pertence ao eixo Oy e à reta r



Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva os dois itens seguintes.

5.1. Calcule a área do triângulo $[ABC]$

5.2. Determine o conjunto solução da seguinte condição:

$$f(x) > 8^{x+4} - k$$

6. Num troço de uma autoestrada, o número de automóveis, em milhares e t horas depois das 11 horas da manhã de um certo dia, foi dado aproximadamente por:

$$a(t) = 2 + 7 \times 2^{t-2} - 2^{2t-3}, \quad t \in [0; 3, 5]$$



- 6.1. Sabe-se que, nesse troço de autoestrada, 60% dos automóveis circula no sentido norte-sul (e os restantes no sentido sul-norte).
 Às 13 horas desse dia, havia 800 automóveis brancos que circulavam no sentido norte-sul e 1000 no sentido sul-norte.
 Ao escolher, ao acaso e às 13 horas, um automóvel qualquer naquele troço da autoestrada, qual foi a probabilidade de ele ser branco?
 Apresente o resultado em percentagem, com arredondamento às décimas.
- 6.2. Houve dois instantes em que houve 8000 automóveis a circular naquele troço de autoestrada.
 Usando métodos analíticos, determine a que horas se deu o segundo instante.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: 6	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	------------------------	---

Grupo II (170 pontos)	1.....15	2.....35	3.....20	4.....20	5.....40	6.....40
		2.1....15 2.2....20			5.1....20 5.2....20	6.1....20 6.2....20

Formulário

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$