

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

1.º Período 10/12/14 Duração: 90 minutos  
Nome: N.º:  
Classificação: O professor:

**Grupo I**

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Doze amigos vão passear em três automóveis diferentes. Sabe-se que cada automóvel leva, no máximo, cinco pessoas e, no mínimo, três. De quantas maneiras diferentes podem ficar distribuídos os doze amigos nos três automóveis?
- (A)  ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 3!$  (B)  ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 5!$   
(C)  ${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_4 \times 3!$  (D)  ${}^{12}C_4 \times {}^{12}C_4 + {}^{12}C_5 \times {}^{12}C_4 \times {}^{12}C_3$

2. Considere a progressão geométrica  $(a_n)$  de primeiro termo 1 e razão  $\sqrt{2}$ . A Efigénia vai escrever num papel, ao acaso, cada um dos nove primeiros termos de  $(a_n)$ . Qual é a probabilidade de ela começar e acabar com um termo que é um número inteiro?

- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{2}{9}$  (D)  $\frac{5}{18}$

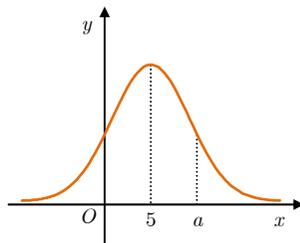
3. Na figura ao lado, está representada a Curva de Gauss referente a uma variável aleatória  $X$ , com distribuição Normal  $N(5, \sigma)$ , e um número  $a$  maior que 5

Sabe-se que:

- $P(X < 0) = P(X > a)$
- $P(0 < X < a) = 0.9$

Qual dos números seguintes pode ser o valor de  $\sigma$  ?

- (A) -1,5 (B) 0 (C) 2,5 (D) 3



4. Considere a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{e^{x+1}}$

Qual das seguintes expressões pode também definir  $f$  ?

- (A)  $e^{-x} \left( 2 + \frac{1}{e} \right)$  (B)  $e^{-x-1} \left( 1 + \frac{2}{e} \right)$  (C)  $e^{-x-1} (2 + e)$  (D)  $e^{-x} (2 + e)$

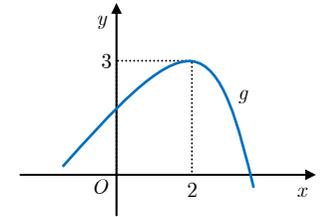
5. No referencial o.n.  $xOy$  do lado, está parte do gráfico da função  $g$

Tal como é sugerido pela figura, a função  $g$  tem um máximo absoluto igual a 3, para  $x = 2$

Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = 5^{g(x)}$

Qual é o contradomínio da função  $h$  ?

- (A)  $]0, 25]$  (B)  $]0, 125]$   
(C)  $] - \infty, 125]$  (D)  $[25, +\infty[$



**Grupo II**

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Decorreram em novembro, em Sochi (Rússia), as partidas para disputar o título de campeão do mundo de xadrez, entre o campeão de 2013, o norueguês Magnus Carlsen, e o campeão anterior, o indiano Viswanathan Anand.



Admita que, no início de cada partida de xadrez entre os dois, a probabilidade de Carlsen ganhar era de 0,4

Estavam previstas 12 partidas para se determinar o campeão do mundo.

Usando métodos analíticos, determine a probabilidade de Carlsen ganhar exatamente 3 partidas.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado  $n$  vezes,  $n > 2$

2.1. Admita que  $n = 4$

Suponha que se escreve um número com quatro algarismos: no primeiro lançamento, sai o algarismo das unidades, no segundo lançamento, sai o das dezenas, no terceiro o das centenas e, no quarto, o dos milhares.

Sabendo que o número obtido é inferior a 5000, qual é a probabilidade de ele ter os algarismos todos diferentes?

2.2. Considere o acontecimento  $D$  : «Saem exatamente dois números pares não primos nos  $n$  lançamentos»

Mostre que

$$P(D) = \frac{{}^n A_2 \times 2^{n-3}}{3^n}$$

3. “O próprio duque [de Borgonha] o havia aprendido à sua custa quando exigira que a moeda que circulava na Flandres fosse fundida para que se cunhassem novas moedas de ouro e de prata, retendo, de passagem, um terço do peso desses escudos em benefício do tesouro borgonhês. A reação dos habitantes de Gand não se havia feito esperar: cortejos de pessoas aos gritos, um assalto à prisão levado a cabo pelos tecelões, o massacre dos almotacés. Finalmente, o duque havia sido constrangido a refrear o seu apetite e a não reter nos seus cofres mais do que um sétimo do peso das moedas flamengas.”

O MENINO DE BRUGES, Gilbert Sinoué

O Isidoro tem, no bolso, oito moedas, algumas de 2 euros e outras de 1 euro. Sabe-se que:

- O Isidoro tem, pelo menos, duas moedas de 1 euro;
- O número de moedas de 2 euros é superior ao número de moedas de 1 euro.

Ele retira, simultaneamente e ao acaso, quatro moedas do bolso.

Seja  $X$  o número de moedas de 2 euros retiradas pelo Isidoro.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a tabela de distribuição de probabilidades da variável  $X$

I)

|              |                |                |                 |                |                |
|--------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $x_i$        | 0              | 1              | 2               | 3              | 4              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{70}$ | $\frac{8}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{8}{35}$ | $\frac{1}{70}$ |

II)

|              |                |               |                |
|--------------|----------------|---------------|----------------|
| $x_i$        | 2              | 3             | 4              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{14}$ |

III)

|              |                |               |               |
|--------------|----------------|---------------|---------------|
| $x_i$        | 2              | 3             | 4             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |

IV)

|              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| $x_i$        | 2             | 3             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar a tabela de distribuição de probabilidades de  $X$
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

4. Dados dois números reais  $a$  e  $b$ , sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  é

|              |               |               |               |     |
|--------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| $x_i$        | -1            | 0             | 2             | $a$ |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $b$ |

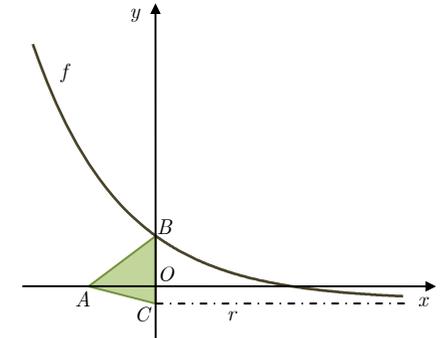
Sabendo que o valor médio de  $X$  é igual a  $P(X = 0)$ , determine, usando métodos analíticos, o valor de  $a$

5. No referencial o.n.  $xOy$  ao lado está representada parte do gráfico da função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = 2^{-x} - k, \text{ em que } k > 0$$

Em relação aos elementos da figura, sabe-se que:

- A reta  $r$  é a assíntota do gráfico de  $f$
- O ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e tem abcissa  $-1$
- O ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$  e ao gráfico de  $f$  e tem ordenada  $\frac{3}{4}$
- O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e à reta  $r$



Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva os dois itens seguintes.

5.1. Calcule a área do triângulo  $[ABC]$

5.2. Determine o conjunto solução da seguinte condição:

$$f(x) > 8^{x+4} - k$$

6. Num troço de uma autoestrada, o número de automóveis, em milhares e  $t$  horas depois das 11 horas da manhã de um certo dia, foi dado aproximadamente por:

$$a(t) = 2 + 7 \times 2^{t-2} - 2^{2t-3}, \quad t \in [0; 3, 5]$$



- 6.1. Sabe-se que, nesse troço de autoestrada, 60% dos automóveis circula no sentido norte-sul (e os restantes no sentido sul-norte).  
 Às 13 horas desse dia, havia 800 automóveis brancos que circulavam no sentido norte-sul e 1000 no sentido sul-norte.  
 Ao escolher, ao acaso e às 13 horas, um automóvel qualquer naquele troço da autoestrada, qual foi a probabilidade de ele ser branco?  
 Apresente o resultado em percentagem, com arredondamento às décimas.
- 6.2. Houve dois instantes em que houve 8000 automóveis a circular naquele troço de autoestrada.  
 Usando métodos analíticos, determine a que horas se deu o segundo instante.

FIM

## COTAÇÕES

|                                  |                        |                                    |   |          |                                    |                                    |
|----------------------------------|------------------------|------------------------------------|---|----------|------------------------------------|------------------------------------|
| <b>Grupo I<br/>(50 pontos)</b>   | Cada resposta certa: 6 |                                    | Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0 |          |                                    |                                    |
| <b>Grupo II<br/>(170 pontos)</b> | 1.....15               | 2.....35<br>2.1....15<br>2.2....20 | 3.....20  | 4.....20 | 5.....40<br>5.1....20<br>5.2....20 | 6.....40<br>6.1....20<br>6.2....20 |

## Formulário

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$