Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}.\,u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \; (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere uma circunferência onde foram assinalados 18 pontos e considere também todos os polígonos convexos que se podem formar com esses pontos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, …).

Quantos são esses polígonos?

(A) $262\,144$ **(B)** $262\,143$ **(C)** $262\,125$ **(D)** $261\,972$

2. O João e a Joana são irmãos gémeos e fazem parte de uma turma de 28 alunos.

2.1. A turma é constituída por 16 raparigas e 12 rapazes. Pretende-se formar um grupo com seis elementos da turma para organizar um jantar de Natal. Para tal, a diretora de turma escolheu aleatoriamente seis elementos, sendo que fez questão que o grupo tivesse o mesmo número de rapazes e de raparigas.

Determine a probabilidade de pelo menos um dos gémeos fazer parte do grupo escolhido para organizar o jantar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. O João esqueceu-se do número de telefone da irmã. Lembra-se apenas que tem nove algarismos, começa por 91 e que tem exatamente dois algarismos 7.

Quantos números de telefone existem nestas condições?

3. Sabe-se que, entre todos os pacientes que apresentam um determinado conjunto de sintomas, a probabilidade de se desenvolver uma determinada doença rara é $0{,}25$.

Foi desenvolvido um teste para identificar a presença desta doença em pacientes e constatou-se que:

- o teste mostra um resultado positivo em 90% dos pacientes que têm a doença;
- em cada quatro pacientes com resultado positivo no teste, três possuem a doença.

O teste é feito a um determinado paciente que apresenta o conjunto de sintomas.

Determine a probabilidade de o paciente não ter a doença e de o teste mostrar um resultado negativo.

4. Considere o desenvolvimento da expressão $\left(\sqrt{x}-1\right)^{25}$, com $x>0$, pelo binómio de Newton.

Escolheram-se aleatoriamente três das parcelas e determinou-se o seu produto.

Qual é a probabilidade de esse produto ser positivo?

(A) $\frac{13}{25}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{11}{100}$ **(D)** $\frac{39}{100}$

5. De uma caixa com 12 bolas, numeradas de 1 a 12, indistinguíveis ao tato, extraíram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas, sem reposição e registaram-se os números das bolas saídas.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A: "os números registados nas três extrações saem por ordem crescente de numeração."

B: "o produto dos números registados é ímpar."

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A|B)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta deve:

- explicar o significado de $P(A|B)$ no contexto da situação descrita;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A|B)$ na forma de fração irredutível.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
8	20	20	25	8	20	**101**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. De uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que o maior elemento é ${}^{n}C_{2017}$.

Qual é o valor da soma de todos os elementos dessa linha?

(A) 2^{4034} **(B)** 2^{4032} **(C)** 2^{2018} **(D)** 2^{2017}

7. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$.

Prove que:

$$P(A) \times P(B) \times [P(A|B) + P(B|A)] = \left(1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})\right) \times (P(A) + P(B))$$

8. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{4^n - 2^n}{4^n + 2^n}$ e uma sucessão (v_n), convergente, da qual se sabe que a partir de certa ordem $v_n - u_n \leq 0$.

Qual dos seguintes valores pode ser o de $\lim v_n$?

(A) $+\infty$ **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 0

9. A turma 12 X, com 20 alunos, vai tirar uma fotografia com os seus cinco professores. Colocando-se aleatoriamente uns ao lado dos outros, em fila, qual é a probabilidade de os alunos ficarem todos juntos na fotografia?

(A) $\frac{20! \times 5!}{25!}$ **(B)** $\frac{20! \times 6!}{25!}$ **(C)** $\frac{20! \times 5! \times 6!}{25!}$ **(D)** $\frac{20! \times 5! \times 2}{25!}$

10. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{n + \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$.

11. Mostre, por indução matemática, que, para todo o número natural, se tem $\sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	
8	25	8	8	25	25	**99**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

$$^{18}C_3 + {}^{18}C_4 + {}^{18}C_5 + \cdots + {}^{18}C_{18} = 2^{18} - {}^{18}C_0 - {}^{18}C_1 - {}^{18}C_2 =$$

$$= 262\,144 - 1 - 18 - 153 =$$

$$= 261\,972$$

2.

2.1. Número de casos possíveis:

$^{16}C_3 \times {}^{12}C_3 = 123\,200$

Número de casos favoráveis:

Número de casos com o João, mas sem a Joana $= {}^{1}C_1 \times {}^{11}C_2 \times {}^{15}C_3 = 25\,025$

Número de casos com a Joana, mas sem o João $= {}^{1}C_1 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_3 = 17\,325$

Número de casos com a Joana e com o João $= {}^{2}C_2 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2 = 5775$

Assim:

Número de casos favoráveis $= 25\,025 + 17\,325 + 5775 = 48\,125$

O valor da probabilidade pedida é $\frac{48\,125}{123\,200} = \frac{25}{64}$.

2.2. _**9**_ _**1**_ __ __ __ __ __ __ __

Existem $^{7}C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições de entre sete, para colocar o algarismo 7.

Para cada uma destas maneiras, existem 9^5 maneiras de escolher ordenadamente e com repetição cinco algarismos de entre os algarismos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}.

Assim, o número de números de telefone nestas condições é $^{7}C_2 \times 9^5 = 1\,240\,029$.

3. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "ter a doença rara"

B: "o teste mostrar um resultado positivo"

Sabemos que:

- $P(A) = \frac{1}{4}$
- $P(B|A) = \frac{9}{10}$
- $P(A|B) = \frac{3}{4}$

Como $P(B|A) = \frac{9}{10}$, então:

$\frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{9}{40}$

Como $P(A|B) = \frac{3}{4}$, então:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{40} = \frac{3}{4} \times P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{36}{120}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

Organizando os dados na tabela abaixo, obtém-se:

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{4}$
$\overline{A}$		$\frac{27}{40}$	$\frac{3}{4}$
Total	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

$$P(\overline{B}\cap A) = \frac{1}{4} - \frac{9}{40} = \frac{1}{40}$$

$$P(\overline{A}\cap \overline{B}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{40} = \frac{27}{40}$$

A probabilidade de o paciente não ter a doença e de o teste mostrar um resultado negativo é igual a $\frac{27}{40}$.

4. Opção (B)

O desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-1\right)^{25}$ tem 26 termos e, como $\sqrt{x} > 0$ e $-1 < 0$, os termos são alternadamente positivos e negativos. Assim, destas 26 parcelas, tem-se que 13 são positivas e 13 são negativas.

Escolhendo aleatoriamente três das parcelas e efetuando o seu produto, tem-se que:

- o número de casos possíveis é ${}^{26}C_3$;
- o número de casos favoráveis é ${}^{13}C_3 + {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_1$ (já que o produto é positivo se três das parcelas forem positivas ou se duas das parcelas forem negativas e uma for positiva).

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{13}C_3 + {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_1}{{}^{26}C_3} = \frac{1300}{2600} = \frac{1}{2}$$

5. $P(A|B)$ representa a probabilidade de os números registados nas três extrações saírem por ordem crescente de numeração, sabendo que o produto dos números registados é ímpar.

Ora, admitido que o produto dos números registados é ímpar, então significa que saíram três números ímpares. Assim, ${}^6A_3$ é o número de casos possíveis, isto é, o número de sequências de três elementos distintos escolhidos de entre os seis números ímpares.

De entre estes casos possíveis, apenas existem ${}^6C_3$ casos favoráveis, isto é, ${}^6C_3$ é o número de subconjuntos de três elementos escolhidos de entre os seis números ímpares, já que se pretende que os números registados tenham saído por ordem crescente.

A probabilidade de um acontecimento é dada, de acordo com a regra de Laplace, pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de caso possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito.

Assim, $P(A|B) = \frac{{}^6C_3}{{}^6A_3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Caderno 2

6. Opção (A)

Se ${}^nC_{2017}$ é o maior elemento de uma determinada linha, então $n = 2 \times 2017 = 4034$.

A soma de todos os elementos dessa linha é igual a 2^{4034}.

7. $P(A) \times P(B) \times \left(P(A|B) + P(B|A)\right) = P(A) \times P(B) \times \left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(B\cap A)}{P(A)}\right) =$

$$= \frac{P(A)\times P(B)\times P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A)\times P(B)\times P(B\cap A)}{P(A)} =$$

$$= P(A) \times P(A \cap B) + P(B) \times P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cap B) \times (P(A) + P(B)) =$$

$$= \left(1 - P(\overline{A \cap B})\right) \times (P(A) + P(B)) =$$

$$= \left(1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})\right) \times (P(A) + P(B))$$

8. Opção (D)

$$\lim u_n = \lim \frac{4^n \times \left(1 - \frac{2^n}{4^n}\right)}{4^n \times \left(1 + \frac{2^n}{4^n}\right)} = \lim \frac{1 - \left(\frac{2}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Sendo (u_n) e (v_n) sucessões convergentes e, como a partir de certa ordem, $v_n - u_n \leq 0$, isto é, $v_n \leq u_n$, tem-se que $\lim v_n \leq \lim u_n$, ou seja, $\lim v_n \leq 1$.

Das opções apresentadas, apenas $0 \leq 1$.

9. Opção (B)

25! é o número de casos possíveis.

Pretendemos que os alunos fiquem todos juntos; então, consideremos um bloco para os alunos e cinco blocos para os cinco professores:

$$\_A\_ \quad \_P_1\_ \quad \_P_2\_ \quad \_P_3\_ \quad \_P_4\_ \quad \_P_5\_$$

20! é o número de maneiras de os alunos trocarem de posição entre si e, por cada uma destas maneiras, existem 6! maneiras distintas de os seis blocos trocarem entre si.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{20!\times 6!}{25!}$.

10. Tem-se que:

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq n+\cos(n\pi) \leq n+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim \frac{n-1}{n^2+1} = \lim \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1-0}{+\infty(1+0)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$\lim \frac{n+1}{n^2+1} = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+0}{+\infty(1+0)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que lim $u_n = 0$.

11. $P(n): \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$

(i) $P(1)$ é verdadeira:

$\sum_{k=1}^{1} {}^{k}C_1 = {}^{2}C_2 \Leftrightarrow {}^{1}C_1 = {}^{2}C_2 \Leftrightarrow 1 = 1$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

$P(n): \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} {}^{k}C_1 = {}^{n+2}C_2$ (tese de indução)

$$\sum_{k=1}^{n+1} {}^{k}C_1 = \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 + {}^{n+1}C_1 =$$

$$\underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_1 =$$

$$= {}^{n+2}C_2$$

Por (i) e (ii), pelo Princípio de Indução Matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$ é uma proposição verdadeira.