



Nome: \_\_\_\_\_

Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_ - \_\_\_ - \_\_\_

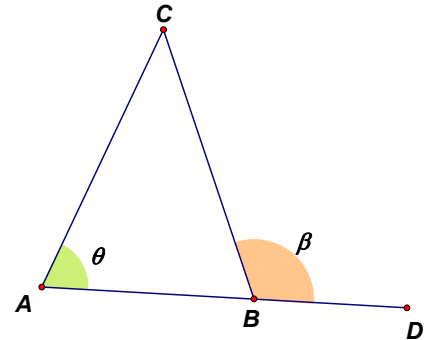
## 1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. Na figura está representado um triângulo isósceles  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = \overline{BC}$
- $\widehat{BAC} = \theta$
- $\widehat{DBC} = \beta$
- os pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$  são colineares.



Indica a afirmação verdadeira.

- (A)  $\cos \beta + \cos \theta = 0$                       (B)  $\sin \beta + \sin \theta = 0$   
(C)  $\cos \theta + \sin \beta = 0$                       (D)  $\cos \beta - \sin \theta = 0$

2. Qual das seguintes expressões designa um número real negativo, para qualquer  $x$  pertencente ao intervalo  $\left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$  ?

- (A)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x$                       (B)  $\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$   
(C)  $\sin x - \cos x$                               (D)  $\sin(\pi + x) \cos(-x)$

3. Considera, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{7}$ .

Qual é o número de soluções da equação dada no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3} \right[$  ?

- (A) 4    (B) 6  
(C) 3    (D) 5

4. Seja  $f$  uma função, real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- a função  $f$  é periódica, sendo o período positivo mínimo  $\frac{2\pi}{3}$ ;
- $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = k$

$\exists a \in \left] \frac{7\pi}{2}, 4\pi \right[ : f(a) = k$ . O valor de  $a$  pode ser:

- (A)  $\frac{29\pi}{12}$                       (B)  $\frac{15\pi}{4}$                       (C)  $\frac{37\pi}{12}$                       (D)  $\frac{49\pi}{12}$

5. Seja  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$  tal que  $7 + 4 \tan(\alpha) = 0$ .

Recorre à calculadora e indica o valor de  $\alpha$ , arredondado às centésimas.

- (A) 2,09                      (B) -1,05                      (C) -4,19                      (D) 5,23

6. Em relação a um referencial ortonormado  $Oxy$  considera a reta  $r$  definida pela equação  $2x - 4y = 3$ .

Seja  $\theta$  a inclinação da reta  $r$ .

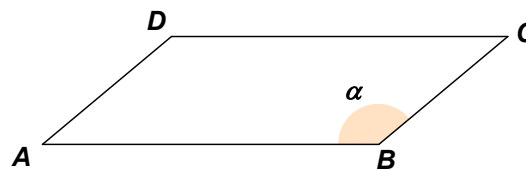
Podes concluir que  $\cos \theta$  é igual a:

- (A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       (B)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$                       (C)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$                       (D)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. Na figura está representado um paralelogramo  $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 6$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 13,5$
- $\alpha = \hat{CBA}$  e  $\cos \alpha = -0,75$



O perímetro do paralelogramo  $[ABCD]$  é igual a:

- (A) 15                      (B) 19                      (C) 18                      (D) 20,5

## 2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considera a função  $f$ , real de variável real, definida por:

$$f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$$

1.1. Verifica que  $\frac{4\pi}{3}$  é período da função.

1.2. Determina os zeros da função pertencentes ao intervalo  $[0, 2\pi]$ .

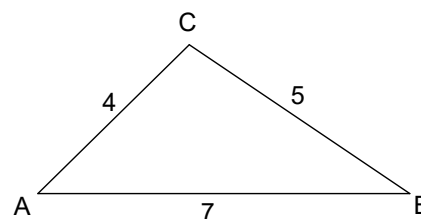
1.3. Resolve a equação  $\tan^2(2x) = f(\pi)$ .

2. Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 7$
- $\overline{AC} = 4$
- $\overline{BC} = 5$

Mostra que  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = -4$ .



3. Considera a função  $f$ , real de variável real, definida por  $f(x) = 2 - 2\cos x$ .

3.1. Determina o valor de  $f(\alpha)$ , sabendo que  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{7}$  e  $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ .

3.2. Na figura, em referencial ortonormado  $Oxy$ , está representada a circunferência trigonométrica e um triângulo  $[ABP]$ .

Sabe-se que:

- $[AP]$  é um diâmetro da circunferência;
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(1, 0)$ ;
- $\widehat{BOP} = \theta$  e  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

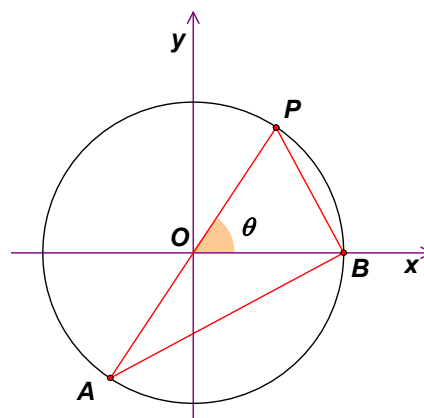
a) Indica as coordenadas do ponto  $P$  se  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

b) Mostra que  $(\overline{PB})^2 = f(\theta)$ .

c) Pretende-se determinar o valor de  $\theta$ , arredondado às centésimas, de modo que  $\overline{AB} = 1,5$ .

Recorre à calculadora gráfica para determinar o valor de  $\theta$ , percorrendo as seguintes etapas:

- . mostra que  $\overline{AB} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$ ;
- . apresenta o gráfico ou gráficos obtidos na utilização da calculadora;
- . assinala o ponto ou pontos relevantes para a resposta;
- . apresenta a resposta.



FIM

		Cotações														
		1.ª Parte							2.ª Parte							
Questões		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.1.	3.2. a)	3.2. b)	3.2. c)
Cotações		8	8	8	8	8	8	8	16	20	20	20	20	15	15	18

## 1.ª Parte

1. Como  $\overline{AC} = \overline{BC}$ , sabe-se que  $\widehat{CBA} = \theta$ . Então  $\beta = 180^\circ - \theta$  e  $\beta$  é necessariamente a amplitude de um ângulo obtuso.

$$\cos \beta = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta. \text{ Então, } \cos \beta + \cos \theta = 0.$$

### Opção (A)

2. Sabe-se que  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ . Então,  $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $-1 < \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

A:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x = \cos x \cos x = \cos^2 x > 0,$

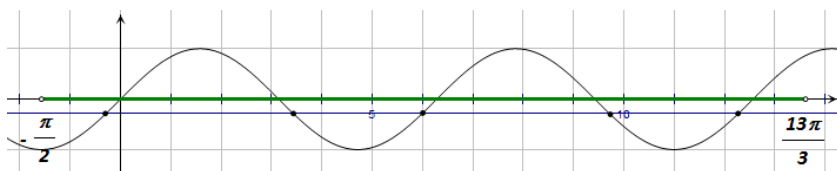
B:  $\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \sin x < 0$ , uma vez que  $\sin x > 0$  e  $\cos x < 0$ ;

C:  $\sin x - \cos x > 0$ , uma vez que  $\sin x > 0$  e  $\cos x < 0$ ;

D:  $\sin(\pi + x) \cos(-x) = -\sin x \cos x > 0$

### Opção (B)

3.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow -\sin x = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{7}$



Em  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3} \right[$  há 5 soluções.

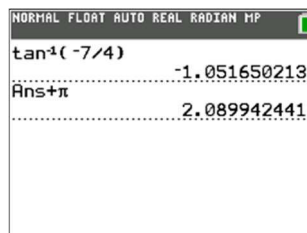
### Opção (D)

4.  $f(a)=k \Leftrightarrow a=\frac{7\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $a=\frac{21\pi+8k\pi}{12}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para  $k=2$ , tem-se  $a=\frac{37\pi}{12}$ .

**Opção (C)**

5.  $7+4\tan(\alpha)=0 \Leftrightarrow \tan(\alpha)=-\frac{7}{4}$



**Opção (A)**

6.  $2x-4y=3 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$

Como o declive da reta é  $\frac{1}{2}$ , tem-se  $\tan\theta=\frac{1}{2}$ , sendo  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Então,  $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ , isto é,  $1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Como  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**Opção (C)**

7.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}=13,5 \Leftrightarrow 6 \times \overline{AD} \times \cos(180^\circ-\alpha)=13,5 \Leftrightarrow -6 \times \overline{AD} \times \cos\alpha=13,5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -6 \times \overline{AD} \times (-0,75)=13,5 \Leftrightarrow \overline{AD}=\frac{13,5}{4,5} \Leftrightarrow \overline{AD}=3$

Então, o perímetro é dado por  $2 \times (6+3)=18$ .

**Opção (C)**

## 2.ª Parte

1.1.  $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

$$f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{3\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)}{2}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right) = f(x)$$

Como  $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = f(x)$ , conclui-se que  $\frac{4\pi}{3}$  é período da função.

1.2.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{3x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 9x = \pi + 12k\pi \vee 9x = 5\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 12k\pi}{9} \vee x = \frac{5\pi + 12k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

Para  $k=0$  tem-se  $x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{5\pi}{9}$ .

Para  $k=1$ , tem-se  $x = \frac{13\pi}{9} \vee x = \frac{17\pi}{9}$ .

Para  $k=2$ , tem-se  $x = \frac{25\pi}{9} \vee x = \frac{29\pi}{9}$ . Estes números já não pertencem a  $[0, 2\pi]$ .

Para  $k=-1$ , obtêm-se valores negativos.

Então, os zeros da função pertencentes ao intervalo  $[0, 2\pi]$  são:  $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$

1.3.  $\tan^2(2x) = f(\pi) \Leftrightarrow \tan^2(2x) = 1 - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tan^2(2x) = 3$

$$\Leftrightarrow \tan(2x) = \sqrt{3} \vee \tan(2x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi + 3k\pi}{6} \vee x = \frac{-\pi + 3k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \times \overline{CB} \times \cos \hat{A}CB$$

Para determinar  $\cos \hat{A}CB$ , podemos recorrer ao Teorema de Carnot (Lei dos cossenos).

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times \cos \hat{A}CB \Leftrightarrow 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \hat{A}CB$$

$$\Leftrightarrow 49 = 16 + 25 - 40 \cos \hat{A}CB \Leftrightarrow 40 \cos \hat{A}CB = -8 \Leftrightarrow \cos \hat{A}CB = -\frac{8}{40} \Leftrightarrow \cos \hat{A}CB = -\frac{1}{5}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -4, \text{ como queríamos mostrar.}$$

$$3.1 \quad f(x) = 2 - 2 \cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{7}$$

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria tem-se:

$$\frac{9}{49} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{40}{49} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{40}}{7} \vee \cos \alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7} \vee \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \alpha < 0. \text{ Então, } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

$$f(\alpha) = 2 - 2 \cos \alpha = 2 - 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right) = 2 + \frac{4\sqrt{10}}{7} = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{7}$$

$$3.2. a) \quad P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\text{Se } \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ tem-se } P\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right), \text{ ou seja, } P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.2. b) \quad B(1,0) \text{ e } P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - 2 \cos \theta + 1}$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = f(\theta)$$

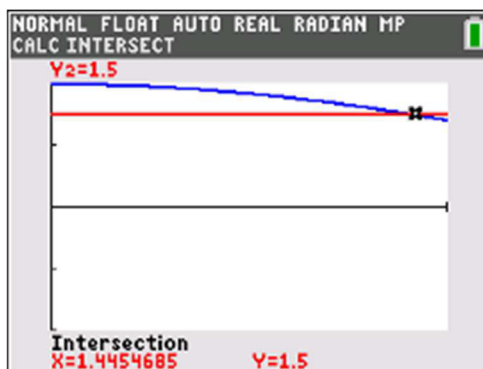
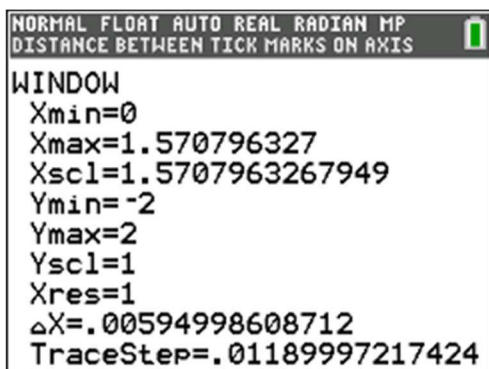
3.2. c) O triângulo  $[ABP]$  é retângulo em  $B$  pois está inscrito numa semicircunferência.

$$\text{Pelo Teorema de Pitágoras tem-se: } \overline{AB}^2 + \overline{PB}^2 = 2^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + (\sqrt{2 - 2 \cos \theta})^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 2 - 2 \cos \theta = 4 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$$

Na calculadora consideram-se as funções  $y_1 = \sqrt{2 + 2 \cos x}$  e  $y_2 = 1,5$ .

Atendendo a que  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , define-se uma janela adequada como a que se exemplifica a seguir, visualizando-se os gráficos.



Determina-se o ponto de interseção dos gráficos obtidos.

$$\theta \approx 1,45$$

FIM