Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2023/2024)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 17

3.º Período 23/05/2024 Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Num saco, estão 10 cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 10.

Retiram-se todos os cartões do saco, um de cada vez.

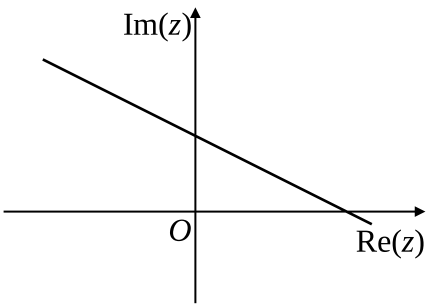
Determine a probabilidade de os primeiros cinco cartões terem os menores números ou os maiores números.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

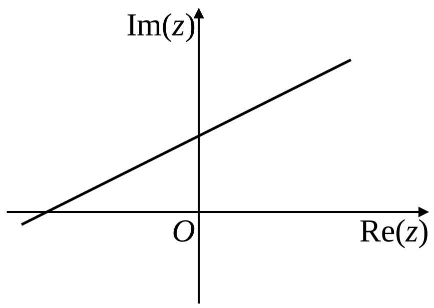
2. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z+8=4\,\mathrm{Im}(z)-\bar{z}$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

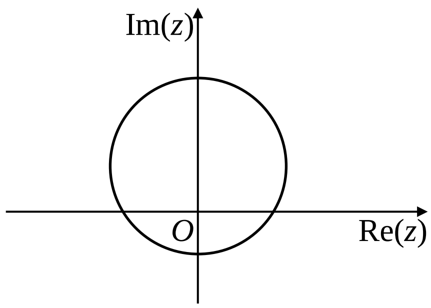
(A)



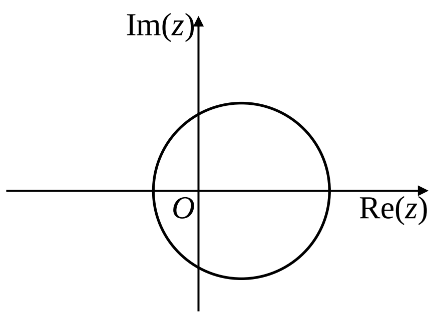
(B)



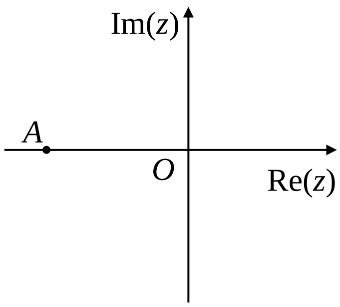
(C)



(D)



3. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, o ponto A, afixo de um número complexo w.



Considere o número complexo $z = \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta$.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{z}{w}$?

(A) $\theta + \pi$ **(B)** $\theta - \pi$

(C) $\theta + \frac{3\pi}{2}$ **(D)** $\theta - \frac{3\pi}{2}$

4. É dado, em $\mathbb{C}$, o número complexo $z = \frac{\left(-\sqrt{8} - \sqrt{8}\,i\right)^n}{4i + 4i^{91} - 3}$.

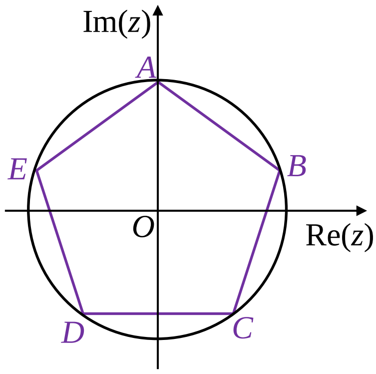
Sem recorrer à calculadora, determine o menor número natural n para o qual z é um imaginário puro de coeficiente positivo.

5. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 - 8\overline{z} = 0$.

Sabe-se que, no plano complexo, apenas uma solução desta equação tem afixo no segundo quadrante.

Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, apresentando o resultado na forma trigonométrica.

6. A figura ao lado representa, no plano complexo, o pentágono $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio 2.



Os vértices do pentágono são os afixos das raízes de índice n de um certo número complexo z.

Tal como sugere a figura, o vértice A pertence ao semieixo positivo imaginário e o vértice B pertence ao primeiro quadrante.

Qual dos seguintes números complexos tem por afixo o vértice C ?

(A) $2e^{i\frac{9\pi}{5}}$ **(B)** $2e^{-i\frac{3\pi}{10}}$

(C) $\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{5}}$ **(D)** $\sqrt[5]{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{10}}$

7. Qual é a solução da equação $2\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3} = 0$ no intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$?

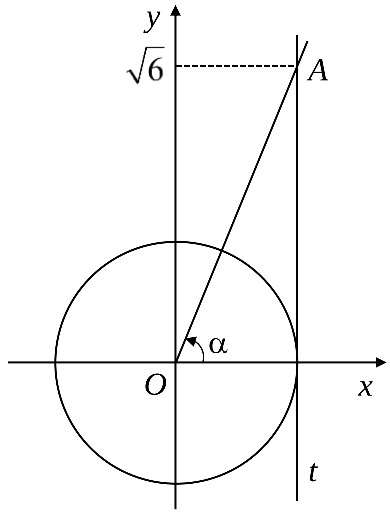
(A) $-\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{5\pi}{6}$ **(D)** $-\frac{7\pi}{6}$

8. Considere, na circunferência trigonométrica da figura:

- a reta t, tangente à circunferência no ponto $(1,0)$;
- a semirreta $\dot{O}A$, sendo A um ponto da reta t de ordenada $\sqrt{6}$;
- o ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$.

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$



9. Considere a função f, de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1) & \text{se } x\leq 3\\ \dfrac{e^{x-3}-2x+5}{x^2-3x} & \text{se } x>3\end{cases}$.

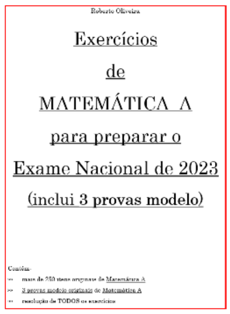
Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

9.1. Averigue se a função f é contínua em $x=3$.

9.2. Resolva, no intervalo $]-1,3]$, a inequação $f(x)-\log_2(2x)<2$.

9.3. O gráfico de f tem apenas uma assíntota vertical.
Qual é a sua equação?

(A) $x=0$ **(B)** $x=3$ **(C)** $x=-2$ **(D)** $x=-1$



10. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\ln\left(5e^{-x}+2\right)+x$.

10.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função g quanto à existência de assíntota horizontal ao seu gráfico quando $x\to-\infty$ e, caso exista, escreva a sua equação.

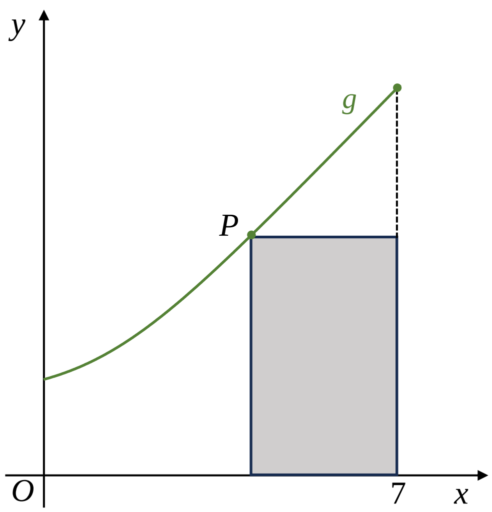
10.2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função g no intervalo $[0,7]$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de g e, para cada posição do ponto P, considere ainda o retângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox, outro na reta de equação $x=7$ e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto P.

Exprima a área do retângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima.

Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente:

- o(s) gráfico(s) obtido(s);
- o ponto de ordenada máxima e respetivas coordenadas, com arredondamento às centésimas.



11. Seja h uma função de domínio $]2,+\infty[$ e diferenciável nesse intervalo, e cuja primeira derivada está definida por $h'(x)=\ln^3\left(x^2-4\right)$.

Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

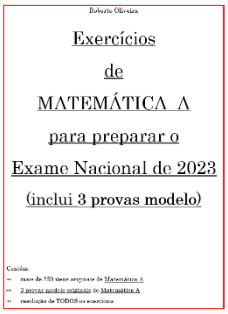
Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de h, se existir(em).

12. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{5-\frac{x}{3}}$.

Existe um único ponto do gráfico de f cuja reta tangente passa na origem do referencial.

Determine a equação dessa reta tangente.


Roberto Oliveira
Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de 2023
(inclui 3 provas modelo)

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.**	
16	8	8	16	16	8	8	16	16	16	8	16	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen}a\,\operatorname{sen}b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k\in\{0,\dots,n-1\}\text{ e }n\in\mathbb{N})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u'\quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen}u)'=u'\,\cos u$

$(\cos u)'=-u'\,\operatorname{sen}u$

$(\operatorname{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\,\ln a\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$