Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere as seguintes proposições a e b:

$\boldsymbol{a}$: $\exists x \in \mathbb{Z}: 3x+1=0$ $\qquad$ $\boldsymbol{b}$: $\forall x \in \mathbb{N},\ 2x > x$

(A) a é verdadeira e b é falsa

(B) a é falsa e b é verdadeira

(C) Ambas são verdadeiras

(D) Ambas são falsas

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira para qualquer número real?

(A) $\sqrt[3]{x-8} = \sqrt[3]{x} - 2$

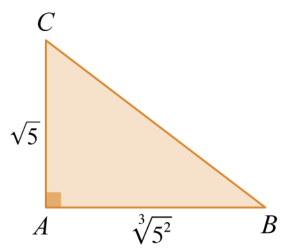
(B) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

(D) $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{3}{9}}$

3. Na figura abaixo está representado o triângulo $[ABC]$, retângulo em A, cujas medidas dos catetos são $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{5^2}$.

A medida da área do triângulo é:



(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(B) $\dfrac{\sqrt[6]{5^5}}{2}$

(C) $\dfrac{5\sqrt[6]{5}}{2}$

(D) $\dfrac{5}{2}$

4. O resto da divisão do polinómio $2x^3 - 2x + 1$ pelo polinómio $x^2 + x$ é:

(A) $2x+1$

(B) 1

(C) $-x+1$

(D) 2

5. Considere a família de polinómios $P(x) = 2x^4 - 3ax^3 + 2a,\ a \in \mathbb{R}$.

O polinómio $P(x)$ é divisível por $(x-1)$ se a é igual a:

(A) $-\dfrac{2}{5}$

(B) $-\dfrac{5}{2}$

(C) $-\dfrac{1}{5}$

(D) 2

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Admita que a proposição $\sim a \wedge b$ é verdadeira.

Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

1.1. $(\sim a \vee b) \Rightarrow b$

1.2. $b \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$

2. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições:

- $p(x): 2 + x > 0 \wedge 3 - x > 0$
- $q(x): -4 < x \leq 1$

Sejam A e B os conjuntos-solução das condições $p(x)$ e $q(x)$, respetivamente.

Determine, sob a forma de intervalo ou união de intervalos de números reais, os conjuntos:

2.1. A **2.2.** B **2.3.** $A \setminus B$ **2.4.** $\overline{A} \cap B$

3. **Sem usar calculadora**, racionalize os denominadores seguintes, simplificando o mais possível.

3.1. $\dfrac{\sqrt[10]{2^{10}}}{4\sqrt{5}}$

3.2. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{6}}$

3.3. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}$

4. Apresente o valor exato e simplificado, na forma $a\sqrt[n]{b}$ sendo a e b números naturais, das seguintes expressões:

4.1. $\dfrac{3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-2}}$

4.2. $5\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{96} + \sqrt{\sqrt{6}}$

5. Considere os polinómios seguintes:

- $A(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
- $B(x) = x^2 - 3x + 1$
- $C(x) = 2x - 4$

5.1. Determine o polinómio-quociente e o polinómio-resto da:

5.1.1. divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$, utilizando o algoritmo da divisão inteira;

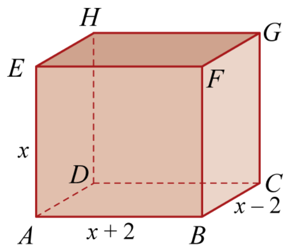
5.1.2. divisão inteira de $A(x)$ por $C(x)$, utilizando a Regra de Ruffini.

5.2. Fatorize o polinómio $A(x)$ e indique a raiz de multiplicidade 3.

5.3. Indique os valores que x pode tomar de forma que $A(x) = 0$.

6. Considere o paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$, representado na figura, em que:

- $\overline{AB} = x + 2$
- $\overline{AE} = x$
- $\overline{AD} = x - 2$



6.1. Mostre que a expressão que define a área total, $A(x)$, do paralelepípedo representado na figura é dada por $A(x) = 6x^2 - 8$.

6.2. Fatorize o polinómio $P(x) = V(x) + A(x) + 8$, sendo $V(x)$ a expressão que define o volume do paralelepípedo representado na figura e $A(x)$ a área total encontrada na alínea anterior.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I – 40 pontos

1.	2.	3.	4.	5.
8	8	8	8	8

Grupo II – 160 pontos

1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	5.1.1.	5.1.2.	5.2.	5.3.	6.1	6.2.
8	8	8	8	10	12	8	8	12	12	8	8	8	12	8	10	12

Proposta de resolução

Grupo I

1. ***a*:** $\exists x \in \mathbb{Z} : 3x+1=0$

$3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

A solução da equação é $x=-\frac{1}{3}$ e como $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, então a proposição a é falsa.

***b*:** $\forall x \in \mathbb{N},\ 2x > x$

$2x > x \Leftrightarrow 2x - x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Como $x \in \mathbb{N}$, então b é verdadeira.

Resposta: (B)

2. $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ e $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{9}}$, logo $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{3}{9}}$.

Resposta: (D)

3. $A=\frac{b \times h}{2}$ com $b=\sqrt[3]{5^2}$ e $h=\sqrt{5}$

$$A=\frac{\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{\sqrt[6]{\left(5^2\right)^2}\times\sqrt[6]{5^3}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{\sqrt[6]{5^4\times 5^3}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{\sqrt[6]{5^7}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{5\sqrt[6]{5}}{2} \text{ u.a.}$$

Resposta: (C)

4. $\left(2x^3-2x+1\right):\left(x^2+x\right)$

$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

$\left(2x^3-2x+1\right)=x(x+1)(2x-2)+1=x(x+1)\times 2x(x-1)+1$

	2	0	–2	1
–1		–2	2	0
	2	–2	0	$\boxed{1}$
0		0	0	0
	2	–2	$\boxed{0}$	

ou

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +0x^2 & -2x & +1 & x^2+x \\ \cline{5-5} -2x^3 & -2x & & & 2x-2 \\ \hline & -2x^2 & -2x & +1 & \\ & 2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4} & & & \boxed{1} \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Resposta: (B)

5. $2x^4-3ax^3+2a$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$P(1)=0 \Leftrightarrow 2-3a+2a=0 \Leftrightarrow -a=-2 \Leftrightarrow a=2$

Resposta: (D)

Grupo II

1. $\sim a \wedge b \Leftrightarrow \text{V}$

Para que uma conjunção seja verdadeira, ambas as proposições têm de ser verdadeiras, ou seja:

$(\sim a \Leftrightarrow \text{V} \wedge b \Leftrightarrow \text{V}) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \text{F} \wedge b \Leftrightarrow \text{V})$

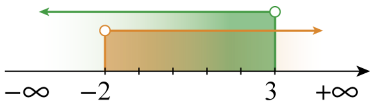
1.1. $(\sim a \vee b) \Rightarrow b \Leftrightarrow (\text{V} \vee \text{V}) \Rightarrow \text{V} \Leftrightarrow \text{V} \Rightarrow \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

1.2. $[b \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)] \Leftrightarrow [\text{V} \Leftrightarrow (\text{V} \vee \text{F})] \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$

2.1. $2 + x > 0 \wedge 3 - x > 0$

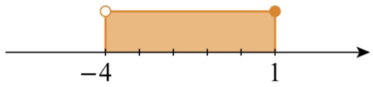
$x > -2 \wedge x < 3$

$A =]-2\,,\,3[$

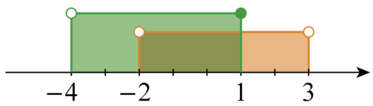


2.2. $-4 < x \leq 1$

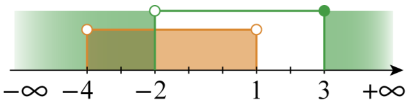
$B =]-4\,,\,1]$



2.3. $A \setminus B =]1\,,\,3[$



2.4. $\overline{A} \cap B =]-4\,,\,-2]$



3.1. $\dfrac{\sqrt[10]{2^{10}}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2}{4\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\times 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$

3.2. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{10\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\,\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{10\sqrt[3]{6^2}}{6} = \dfrac{5\sqrt[3]{6^2}}{3}$

3.3. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{20} + 2\sqrt{2^2}}{\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} =$

$= \dfrac{2\sqrt{5} + 4}{10 - 4\times 2} = \dfrac{2\sqrt{5} + 4}{2} = \sqrt{5} + 2$

20	2
10	2
5	5
1	

4.1. $\dfrac{3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-2}} = \dfrac{3^{\frac{1}{6} + \underset{(\times 3)}{\frac{1}{2}}}}{3^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{6} + \frac{3}{6}}}{3^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{4}{6}}}{3^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$

4.2. $5\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{96} + \sqrt{\sqrt{6}} =$

$= 5\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{2^4 \times 2 \times 3} + \sqrt[4]{6} =$

$= 5\sqrt[4]{6} - 2\sqrt[4]{2 \times 3} + \sqrt[4]{6} =$

$= (5 - 2 + 1)\sqrt[4]{6} =$

$= 4\sqrt[4]{6}$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

5.1.1.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & -1 & x^2-3x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +3x^3 & -x^2 & & & x^2+x+2 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & -x^2 & +2x & -1 & \\
 & -x^3 & +3x^2 & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & +x & -1 & \\
 & & -2x^2 & +6x & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 7x & -3 &
\end{array}$$

Polinómio-quociente: $Q(x)=x^2+x+2$

Polinómio-resto: $R(x)=7x-3$

5.1.2.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & 4 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 2 & \boxed{3}
\end{array}$$

$2x-4=0$
$x=2$

Polinómio-quociente: $Q(x)=\frac{1}{2}(x^3+2) \Leftrightarrow Q(x)=\frac{x^3}{2}+1$

Polinómio-resto: $R(x)=3$

5.2. $A(x)=x^4-2x^3+0x^2+2x-1$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\
1 & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
 & 1 & -1 & -1 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & -1 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

1 e -1 são raízes do polinómio

$x^4-2x^3+2x-1=(x-1)(x+1)(x^2-2x+1)$

$(x-1)(x+1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1)$

$A(x)=(x-1)(x-1)(x-1)(x+1)$

$A(x)=(x-1)^3(x+1)$

A raiz de multiplicidade 3 é o 1.

5.3. $A(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x-1=0 \vee x=-1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

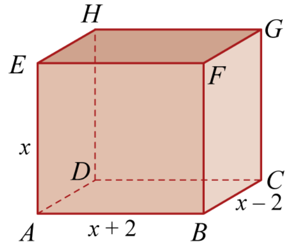
$x \in \{-1, 1\}$

6.1. $A_{\text{total}}=2\times A_{[ABFE]}+2\times A_{[ADHE]}+2\times A_{[EFGH]}=$

$=2x(x+2)+2x(x-2)+2(x-2)(x+2)=$

$=2x^2+\cancel{4x}+2x^2-\cancel{4x}+2x^2-8=$

$=6x^2-8$



6.2. $V(x)=A_b\times h=x(x-2)(x+2)=x(x^2-4)=x^3-4x$

Assim,

$P(x)=V(x)+A(x)+8$

$P(x)=x^3-4x+6x^2-\cancel{8}+\cancel{8}$

$P(x)=x^3+6x^2-4x$

$$P(x) = x\left(x^2 + 6x - 4\right)$$
$$P(x) = x\left(x + 3 - \sqrt{13}\right)\left(x + 3 + \sqrt{13}\right)$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 16}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{13} \vee x = -3 + \sqrt{13}$$