Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Em referencial o.n. *xOy*, considera:

. a circunferência definida pela equação $x^2 - 4x + (y+1)^2 = 5$;

. a reta *r* definida por $x - 3y - 5 = 0$.

1.1. Mostra que a reta *r* passa pelo centro da circunferência dada.

1.2. Considera uma reta *s* perpendicular à reta *r* e que passa na origem do referencial.

A reta *s* pode ser definida pela equação:

(A) $(x, y) = (2, -6) + k(1, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (0, 0) + k(3, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (2, -3) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (0, 0) + k(1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

2. Na figura, em referencial o.n. *Oxyz*, está representada a pirâmide quadrangular regular [*ABCDV*].

Sabe-se que:

. o ponto *O* é o centro da base da pirâmide;

. os vértices *A* e *C* pertencem a *Ox*;

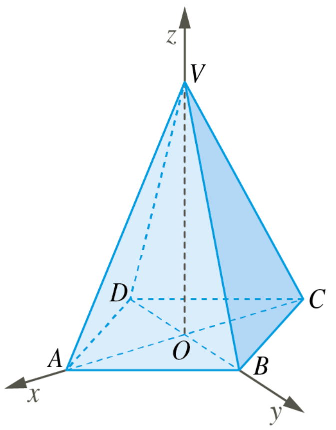
. os vértices *B* e *D* pertencem a *Oy*;

. o vértice *V* pertence a *Oz*;

. o vértice *A* tem coordenadas $(4, 0, 0)$;

. a reta *AV* é definida pela equação:

$(x, y, z) = (2, 0, 4) + k(-1, 0, 2)$, $k \in \mathbb{R}$



2.1. Determina a altura da pirâmide.

2.2. Representa por uma equação, na forma reduzida, a superfície esférica de diâmetro [*AB*].

2.3. A interseção da pirâmide com o plano definido pela equação $z = 6$ é um quadrado.

Determina a medida da área desse quadrado.

3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $f(x) = -4x + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $f^{-1}(3) = 2$, sendo f^{-1} a função inversa de f.

O valor de k é:

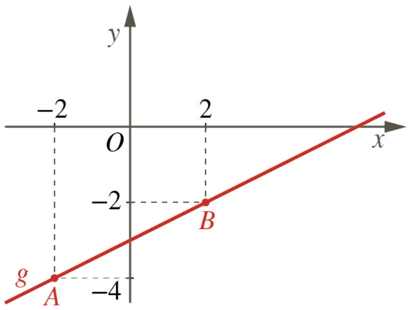
(A) 14 **(B)** –10 **(C)** 11 **(D)** 13

4. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

. $f(x) = -3x + 5$

. o gráfico de g é uma reta e está representado na figura;

. os pontos $A(-2,-4)$ e $B(2,-2)$ pertencem ao gráfico de g.



4.1. Determina os zeros da função g.

4.2. Seja h a função composta $h = f \circ g$.

Sabe-se que $h(-2) = k$.

O valor de k é:

(A) 11 **(B)** 17 **(C)** –1 **(D)** –4

4.3. Resolve a inequação $f(x) < g(x)$ e apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a função f tem exatamente três zeros: –2, 3 e 5

5.1. Considera a função g de domínio $\mathbb{R}$ e definida por $g(x) = 2 - f(x+5)$.

Indica as transformações geométricas que deves aplicar ao gráfico de f para obteres o gráfico de g.

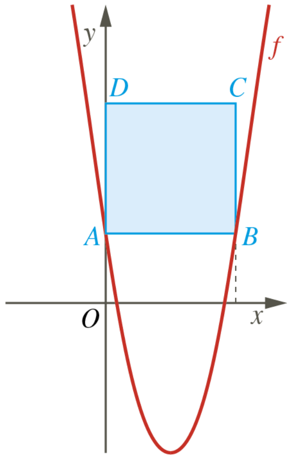
5.2. Considera, agora, a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a soma dos zeros da função h é igual a 4. O valor de k é:

(A) 2 **(B)** $-\frac{5}{2}$ **(C)** –4 **(D)** $-\frac{2}{3}$

6. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\sqrt{2}x^2-6x+2$$



Na figura, em referencial o.n. *xOy*, estão representados o gráfico da função *f* e o quadrado [*ABCD*].

Sabe-se que:

. o vértice *A* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com *Oy*;

. os vértices *A* e *B* têm igual ordenada.

Determina a medida da área do quadrado [*ABCD*].

7. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-x^2+3x+2$.

7.1. Resolve a inequação $f(x)\leq 2x-4$.

7.2. A reta de equação $y=\pi$ interseta o gráfico de *f* em dois pontos *A* e *B*, sendo *A* o de menor abcissa.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a diferença entre as abcissas de *B* e de *A*.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Na tua resposta deves:

. reproduzir, num referencial, o gráfico de *f* e a reta $y=\pi$;

. assinalar os pontos *A* e *B* e as respetivas abcissas arredondadas às milésimas.

FIM

	Cotações													
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
Pontos	12	12	10	15	15	12	15	12	20	15	12	15	20	15	**200**

1.

1.1. $x^2-4x+(y+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2-4x+4+(y+1)^2=5+4 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2=9 \rightarrow$ Circunferência de centro $C(2,-1)$ e raio 3

As coordenadas do centro C são soluções da equação $x-3y-5=0$.

Dado que $2-3\times(-1)-5=0$, então a reta r passa pelo centro da circunferência.

1.2. $x-3y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

O declive da reta r é $\frac{1}{3}$, pelo que o declive da reta s é –3.

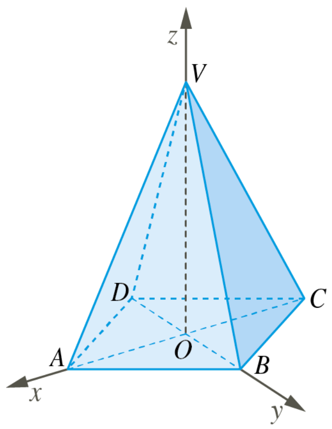
As opções (A) e (C) são as únicas que representam retas com declive –3.

Na opção (A), o ponto $(0, 0)$ pertence à reta, o mesmo não acontecendo na opção (C).

Opção: (A) $(x, y)=(2,-6)+k(1,-3)$, $k\in\mathbb{R}$

2.

2.1. O vértice V é a interseção da reta AV com o eixo Oz.



As coordenadas de V são do tipo $(0,0,z)$.

$(0,0,z)=(2,0,4)+k(-1,0,2)$, $k\in\mathbb{R}$

Daqui resulta:

$$\begin{cases} 2-k=0 \\ 0+0=0 \\ 4+2k=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ 0=0 \\ z=8 \end{cases}$$

$V(0,0,8)$, pelo que se conclui que a altura da pirâmide é igual a 8.

Resposta: 8

2.2. $A(4,0,0)$ e $B(0,4,0)$

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+4^2+0^2}=4\sqrt{2}$

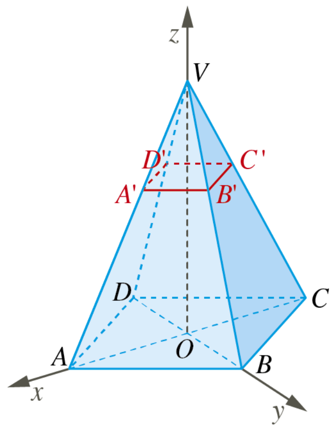
Raio da superfície esférica: $r=2\sqrt{2}$

Centro da superfície esférica: $\left(\frac{4+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(2,2,0)$

Equação da superfície esférica: $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=8$

Resposta: $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=8$

2.3. Seja A' o ponto de interseção da reta AV com o plano $z=6$.



$A'(x,y,6)$

$(x,y,6)=(2,0,4)+k(-1,0,2)$, $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=2-k \\ y=0+0 \\ 6=4+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ k=1 \end{cases}$$

$A'(x,y,6)$, ou seja, $A'(1,0,6)$.

Os triângulos $[ABV]$ e $[A'B'V]$ são semelhantes, pelo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}}$.

$\overline{AB}=4\sqrt{2}$

$\overline{AV}=\sqrt{4^2+0^2+8^2}=4\sqrt{5}$

$\overline{A'V}=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

Assim, $\frac{4\sqrt{2}}{\overline{A'B'}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \overline{A'B'}=\sqrt{2}$.

Área do quadrado $[A'B'C'D']$: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ u.a.

Resposta: 2 u.a.

3. Se $f^{-1}(3)=2$, então $f(2)=3$, ou seja, $-4\times2+k=3\Leftrightarrow k=11$

Opção: (C) 11

4.

4.1. $g(x)=ax+b$

$$\begin{cases} g(2)=-2 \\ g(-2)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ -2a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2a \\ -2a-2-2a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$g(x)=\frac{1}{2}x-3$

$g(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-3=0\Leftrightarrow x=6$

Zeros de g: 6

Resposta: 6

4.2. $h(-2)=k \Leftrightarrow (f\circ g)(-2)=k \Leftrightarrow f(g(-2))=k \Leftrightarrow f(-4)=k \Leftrightarrow -3\times(-4)+5=17$

Opção: (B) 17

4.3. $f(x)<g(x) \Leftrightarrow -3x+5<\frac{1}{2}x-3 \Leftrightarrow -6x+10<x-6 \Leftrightarrow -7x<-16 \Leftrightarrow x>\frac{16}{7}$

Resposta: $x\in \left]\frac{16}{7},+\infty\right[$

5.

5.1. Começa-se por aplicar uma translação de vetor $\vec{u}(-5,0)$. De seguida, uma reflexão de eixo Ox e, por fim, uma translação de vetor $\vec{v}(0,2)$.

5.2. Os zeros de h são: $-2+k$; $3+k$ e $5+k$

Sabe-se que $-2+k+3+k+5+k=4$.

$-2+k+3+k+5+k=4 \Leftrightarrow 3k=-2 \Leftrightarrow k=-\frac{2}{3}$

Opção: (D) $-\frac{2}{3}$

6. $f(0)=2$. Assim, $A(0,2)$.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2-6x+2=2 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2-6x=0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}x-6\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$, logo, a medida da área do quadrado $[ABCD]$ é $\left(\overline{AB}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ u.a.

Resposta: 18 u.a.

7.

7.1. $f(x)\leq 2x-4 \Leftrightarrow -x^2+3x+2\leq 2x-4 \Leftrightarrow -x^2+x+6\leq 0$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

Cálculo auxiliar

$-x^2+x+6=0 \Leftrightarrow$

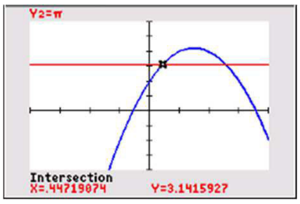
$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2} \Leftrightarrow$

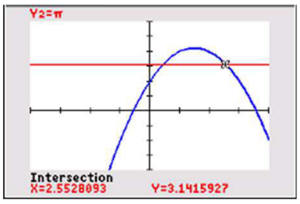
$\Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=3$

$-x^2+x+6\leq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

Resposta: $x\in \left]-\infty,-2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

7.2. Inserindo na calculadora as expressões das funções $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ e $y = \pi$, podem visualizar-se as correspondentes representações gráficas e identificar os referidos pontos de interseção *A* e *B*.





Designando por x_A e x_B as abcissas de *A* e *B*, respetivamente, tem-se:

$$x_A \approx 0,447 \quad \text{e} \quad x_B \approx 2,553$$

Assim, $x_B - x_A \approx 2,1$.

Resposta: A diferença entre as abcissas de *B* e de *A* é de, aproximadamente, 2,1.

FIM

	Cotações														
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
Pontos	12	12	10	15	15	12	15	12	20	15	12	15	20	15	**200**