Itens Para Testes de Avaliação | 3.º Período

MATEMÁTICA A | 10.º ANO

Temas: Cálculo Vetorial no Espaço, Função Quadrática, Função Módulo e Funções Polinomiais

1. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a reta r, definida por $(x,y,z)=(0,1,0)+k(-4,4,3)$, $k\in\mathbb{R}$, e os pontos $A(1,0,0)$ e $B(3,0,0)$.

Quais são as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano mediador do segmento de reta $[AB]$?

A $\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$

B $\left(\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$

C $\left(2,-1,-\frac{3}{2}\right)$

D $\left(2,3,\frac{3}{2}\right)$

2. Considera uma função quadrática, f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(1)=f(-5)$ e $f(2)<f(1)$.

Qual é o contradomínio da função f?

A $]-\infty, f(-2)]$

B $]-\infty, f(3)]$

C $[f(-2),+\infty[$

D $[f(3),+\infty[$

3. Seja k um número real tal que o polinómio $A(x)=k^2x^4-4kx^3+3x-2$ é sempre de grau 4.

Qual é o valor de k de modo que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x-2$ seja 4?

A 0

B 1

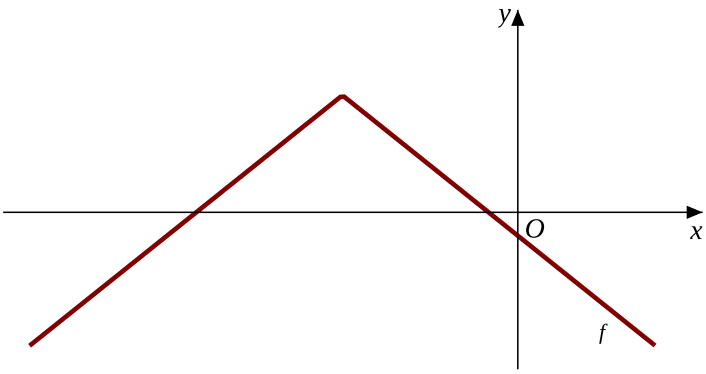
C 2

D 3

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

4. Na figura, está representada, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função, f, definida por uma expressão do tipo $f(x) = a|x+h| + k$.



4.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $a > 0$, $h > 0$ e $k < 0$

B $a < 0$, $h > 0$ e $k > 0$

C $a < 0$, $h < 0$ e $k > 0$

D $a > 0$, $h < 0$ e $k < 0$

4.2 Considera, agora, que os zeros de f são $-\frac{11}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

Determina o conjunto-solução da equação $|f(x)| + f(x) = 0$.

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $f(x) = a|x-h| + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, tais que $f(0) = -1$ e $f(-2) = f(10) = 0$.

5.1 Mostra que $f(x) = \frac{1}{2}|x-4| - 3$ e indica e classifica, justificando, o extremo absoluto de f.

5.2 Determina o conjunto-solução das seguintes condições:

5.2.1 $f(x) = 1$

5.2.2 $3f(x) \leq 4$

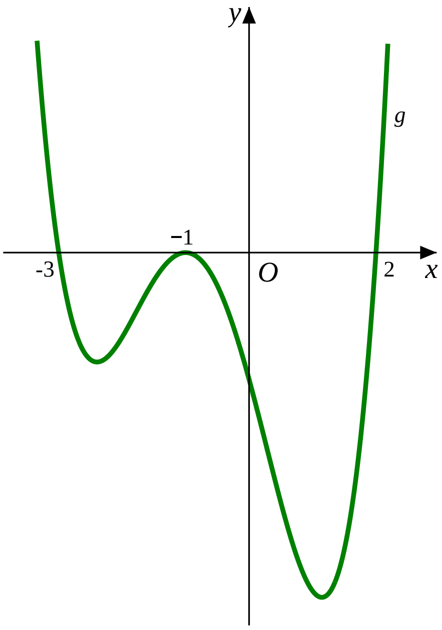
5.2.3 $|x^2 - 1| + f(0) > 0$

5.3 Define a função f por ramos.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

6. Na figura, está representada, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função polinomial, g, de grau 4.



Sabe-se que:

- os únicos zeros da função g são -3 -1 e 2;
- $g(-2) = -\dfrac{4}{3}$.

6.1 Qual é conjunto-solução da inequação $(x-2)g(x) > 0$?

A $]-\infty, -3[$

B $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

C $]-3, 2[\setminus \{-1\}$

D $]-3, +\infty[\setminus \{-1, 2\}$

6.2 Mostra que $g(x) = \dfrac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - \dfrac{11}{3}x - 2$.

6.3 Considera a função polinomial, f, definida por $f(x) = g(x) + k$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, determina entre que valores deve variar k de modo que f tenha exatamente dois zeros positivos.

Na tua resposta, apresenta o(s) gráfico(s) que considerares necessário(s) para resolver o problema e o extremo superior do intervalo arredondado às centésimas.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

7. Considera a função, f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -3x^3 + 12x^2 + 21x - 30$.

7.1 Utilizando a regra de Ruffini, determina o resto e o quociente da divisão inteira de $f(x)$ por $2x+3$.

7.2 Determina $f(1)$, interpreta o resultado, e mostra que $f(x) = -3(x+2)(x-1)(x-5)$.

7.3 Determina o conjunto-solução da condição $f(x) \geq 0$.

8. Seja h uma função polinomial de grau superior ou igual a 2, tal que:

- o gráfico de h interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3;
- o resto da divisão inteira de $h(x)$ por $x-5$ é -2.

Determina o resto da divisão inteira de $h(x)$ por $x^2 - 5x$.

FIM

Nota ao professor: Caso pretenda utilizar o conjunto de itens apresentados como um teste, sugere-se a seguinte tabela de cotações:

1.	2.	3.	4.1	4.2	5.1	5.2.1	5.2.2	5.2.3	5.3	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	7.3	8.	Total
10	10	10	10	12	12	13	13	13	10	13	13	13	13	13	13	10	200

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Propostas de resolução

1. Os pontos A e B pertencem ambos ao eixo Ox, pelo que o seu plano mediador é perpendicular a Ox. Assim, como se tem $A(1,0,0)$ e $B(3,0,0)$, uma equação do plano mediador de $[AB]$ é $x=\frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x=2$.

Logo, substituindo x por 2 na equação vetorial da reta r, tem-se:

$$(2,y,z)=(0,1,0)+k(-4,4,3),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=0-4k \\ y=1+4k \\ z=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k=-2 \\ y=1+4k \\ z=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{2}{4} \\ y=1+4k \\ z=3k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ y=1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z=3\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ y=-1 \\ z=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção entre a reta r e o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ são $\left(2,-1,-\frac{3}{2}\right)$.

Resposta: C

2. Como $f(-5)=f(1)$, a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de f é $\frac{-5+1}{2}=-2$, pelo que a sua ordenada é $f(-2)$.

Assim, como $f(2)<f(1)$, conclui-se que f é decrescente em $[-2,+\infty[$ e é crescente em $]-\infty,-2]$, pelo que $f(-2)$ é o máximo absoluto de f e, portanto, o contradomínio da função f é $]-\infty, f(-2)]$.

Resposta: A

3. O resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x-2$ é dado por $A(2)$. Assim:

$$A(2)=4 \Leftrightarrow k^2\times 2^4-4k\times 2^3+3\times 2-2=4 \Leftrightarrow 16k^2-32k+\cancel{4}=\cancel{4} \Leftrightarrow 16k^2-32k=0 \Leftrightarrow 16k(k-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k=0 \ \vee\ k-2=0 \Leftrightarrow k=0 \ \vee\ k=2$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Para que o polinómio $A(x)$ seja de grau 4 é necessário que o coeficiente de x^4 , k^2, seja diferente de zero, pelo que k não pode ser zero e, portanto, $k=2$.

Resposta: C

4.1 Tem-se que $f(x)=a|x+h|+k$, pelo que as coordenadas do vértice do seu gráfico são $(-h,\, k)$.

Assim:

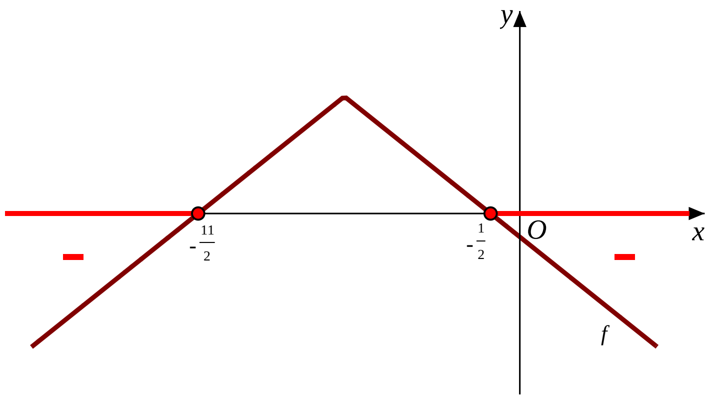
- como o vértice pertence ao segundo quadrante, vem que $-h<0 \Leftrightarrow h>0$ e $k>0$;
- como f é crescente em $]-\infty,-h]$ e é decrescente em $[-h,+\infty[$, vem que $a<0$.

Logo, $a<0$, $h>0$ e $k>0$.

Resposta: B

4.2 Tem-se $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x)<0 \end{cases}$ ou $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x)>0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x)\leq 0 \end{cases}$.

Portanto, $|f(x)|+f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=-f(x) \Leftrightarrow f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{11}{2} \ \vee \ x\geq -\frac{1}{2}$.



Logo, o conjunto-solução da equação $|f(x)|+f(x)=0$ é $\left]-\infty,-\frac{11}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

5.1 Como $f(-2)=f(10)=0$, tem-se que a abcissa do vértice do gráfico de f, h, é dada por:

$$h=\frac{-2+10}{2}=4\Rightarrow f(x)=a|x-4|+k$$

Por outro lado, $f(0)=-1$ e $f(-2)=0$, pelo que:

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a|0-4|+k=-1 \\ a|-2-4|+k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+k=-1 \\ 6a+k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-6a=-1 \\ k=-6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a=-1 \\ k=-6a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ k=-6\times\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ k=-3 \end{cases}$$

Logo, $f(x)=\frac{1}{2}|x-4|-3$.

As coordenadas do vértice do gráfico de f são $(4,-3)$; $a=\frac{1}{2}>0$, pelo que f é decrescente em $]-\infty,4]$ e é crescente em $[4,+\infty[$ e, portanto, -3 é o mínimo absoluto de f.

5.2.1 $f(x)=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|-3=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|=4\Leftrightarrow |x-4|=8\Leftrightarrow x-4=8 \ \vee \ x-4=-8\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=12 \ \vee \ x=-4$$

$\therefore$ O conjunto-solução da condição $f(x)=1$ é $\{-4,12\}$.

5.2.2 $3f(x)\leq 4\Leftrightarrow f(x)\leq\frac{4}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|-3\leq\frac{4}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|\leq\frac{4}{3}+3\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|\leq\frac{13}{3}\Leftrightarrow |x-4|\leq\frac{26}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x-4|\leq\frac{26}{3}\Leftrightarrow x-4\leq\frac{26}{3} \ \vee \ x-4\geq-\frac{26}{3}\Leftrightarrow x\leq 4+\frac{26}{3} \ \vee \ x\geq 4-\frac{26}{3}$$

$$\Leftrightarrow x\leq\frac{38}{3} \ \vee \ x\geq-\frac{14}{3}$$

$\therefore$ O conjunto-solução da condição $3f(x)\leq 4$ é $\left[-\frac{14}{3},\frac{38}{3}\right]$.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

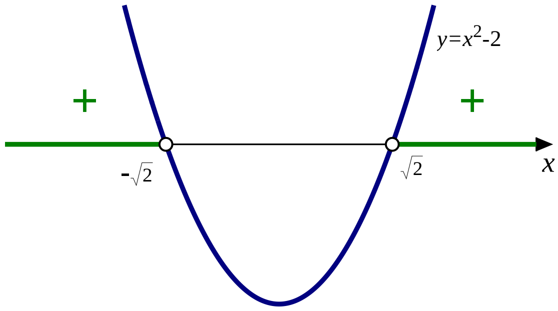
5.2.3 $\left|x^2-1\right|+f(0)>0 \Leftrightarrow \left|x^2-1\right|-1>0 \Leftrightarrow \left|x^2-1\right|>1 \Leftrightarrow x^2-1>1 \ \vee \ x^2-1<-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-2>0 \ \vee \ \underbrace{x^2<0}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \ \Leftrightarrow x^2-2>0$$

Tem-se que

$$x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \ \vee \ x=\sqrt{2}$$

Na figura ao lado, estão esboçados o gráfico da função definida por $y=x^2-2$ e os intervalos em que é positiva.



$\therefore$ O conjunto-solução da condição $\left|x^2-1\right|+f(0)>0$ é $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2},+\infty\right[$.

5.3 Tem-se que $|x-4|=\begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x-4\geq 0 \\ -(x-4) & \text{se} \quad x-4<0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x\geq 4 \\ -x+4 & \text{se} \quad x<4 \end{cases}$.

Logo, $f(x)=\frac{1}{2}|x-4|-3=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-4)-3 & \text{se} \quad x\geq 4 \\ \frac{1}{2}(-x+4)-3 & \text{se} \quad x<4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2}-2-3 & \text{se} \quad x\geq 4 \\ -\frac{x}{2}+2-3 & \text{se} \quad x<4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2}-5 & \text{se} \quad x\geq 4 \\ -\frac{x}{2}-1 & \text{se} \quad x<4 \end{cases}$.

6.1 Tem-se que $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Construindo uma tabela de variação do sinal:

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

Logo, o conjunto-solução da inequação $(x-2)g(x)>0$ é $\left]-3,+\infty\right[\setminus \{-1,2\}$.

Resposta: D

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

6.2 A função g é polinomial de grau 4, e os seus únicos zeros são -3, -1 e 2. Tendo em conta a representação gráfica de g, -1 é um zero de multiplicidade 2. Assim:

$$g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)^2\text{, com } a\in\mathbb{R}$$

Como $g(-2)=-\frac{4}{3}$, tem-se:

$$g(-2)=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow a(-2+3)(-2-2)(-2+1)^2=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow a\times1\times(-4)(-1)^2=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow -4a=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

Portanto, $g(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-2)(x+1)^2=$

$$=\frac{1}{3}(x^2-2x+3x-6)(x^2+2x+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x-6)(x^2+2x+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(x^4+2x^3+x^2+x^3+2x^2+x-6x^2-12x-6)$$

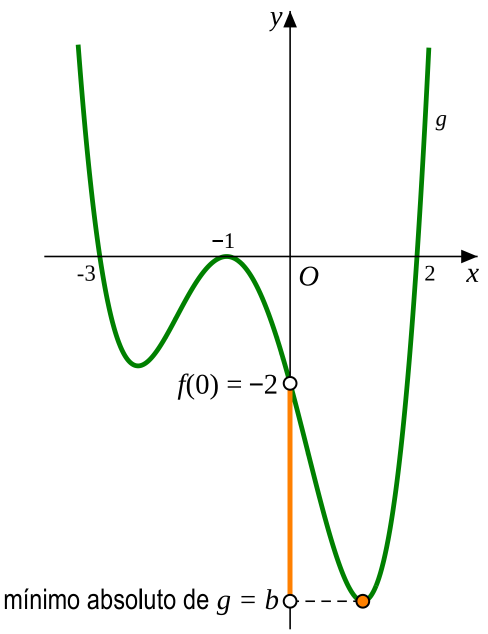
$$=\frac{1}{3}(x^4+3x^3-3x^2-11x-6)$$

$$=\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2-\frac{11}{3}x-2$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

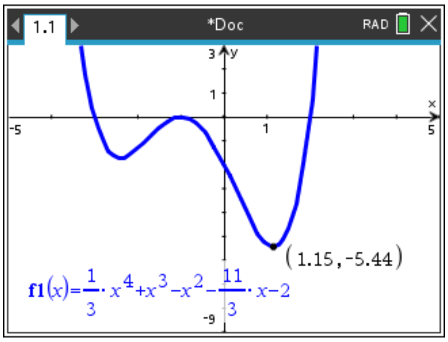
6.3 O gráfico da função f, definida por $f(x) = g(x) + k$, obtém-se do gráfico da função g, através de uma translação de vetor $(0, k)$.

Tendo em conta a figura ao lado, conclui-se que para f ter dois zeros positivos, o gráfico de g tem de se deslocar, verticalmente, mais de duas unidades para cima, dado que $f(0) = -2$, mas menos de $|b|$, sendo b o mínimo absoluto de g, pelo que $k \in \left]2, |b|\right[$.

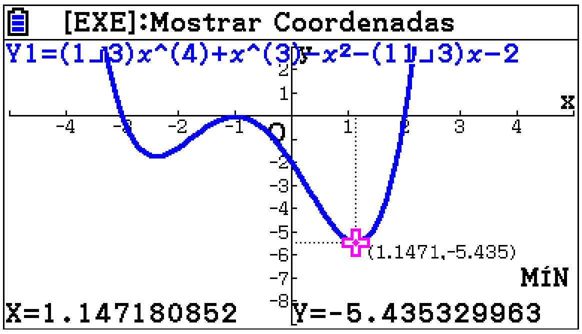


Vamos, então, recorrer a uma calculadora gráfica para determinar o valor de b, arredondado às centésimas.

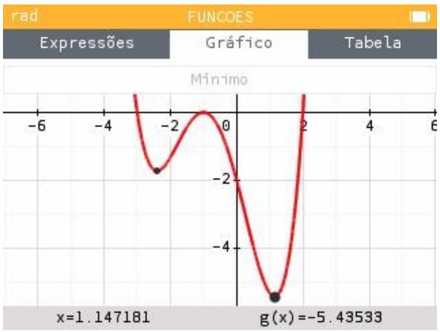
TI Nspire CX II-T



CASIO FX–CG50



NUMWORKS



Portanto, a função f tem dois zeros positivos se $k \in \left]2, |b|\right[$, com $|b| \approx 5{,}44$.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

7.1 Tem-se $2x+3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$. Utilizando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -3 & 12 & 21 & -30 \\
-\frac{3}{2} & & \frac{9}{2} & -\frac{99}{4} & \frac{45}{8} \\
\hline
 & -3 & \frac{33}{2} & -\frac{15}{4} & \boxed{-\frac{195}{8}}
\end{array}$$

Portanto, o quociente e o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x+\frac{3}{2}$, são, respetivamente

$$-3x^2+\frac{33}{2}x-\frac{15}{4} \quad \text{e} \quad -\frac{195}{8}.$$

Portanto, $f(x)=\underbrace{\left(x+\frac{3}{2}\right)}_{\text{divisor}}\underbrace{\left(-3x^2+\frac{33}{2}x-\frac{15}{4}\right)}_{\text{Quociente da divisão inteira de } f(x) \text{ por } x+\frac{3}{2}}\underbrace{-\frac{195}{8}}_{\text{Resto}}=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(-3x^2+\frac{33}{2}x-\frac{15}{4}\right)-\frac{195}{8}=$

$$=\underbrace{(2x+3)}_{\text{divisor}}\times\underbrace{\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{33}{4}x-\frac{15}{8}\right)}_{\text{Quociente da divisão inteira de } f(x) \text{ por } 2x+3}\underbrace{-\frac{195}{8}}_{\text{Resto}}$$

Logo, o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $2x+3$ é $-\frac{195}{8}$ e o quociente é $-\frac{3}{2}x^2+\frac{33}{4}x-\frac{15}{8}$.

7.2 $f(1)=-3\times1^2+12\times1+21\times1-30=-3+12+21-30=0$. Logo, 1 é um zero de f, ou seja, o resto da divisão inteira do polinómio $f(x)$ por $x-1$ é zero, ou ainda, $f(x)$ é divisível por $x-1$.

Utilizando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -3 & 12 & 21 & -30 \\
1 & & -3 & 9 & 30 \\
\hline
 & -3 & 9 & 30 & \boxed{0}
\end{array}$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Logo, $f(x)=(x-1)(-3x^2+9x+30)$.

Determinando os zeros do polinómio $-3x^2+9x+30$, vem que:

$$-3x^2+9x+30=0 \underset{\div(-3)}{\Leftrightarrow} x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-10)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3-7}{2} \vee x=\frac{3+7}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=5$$

Portanto, os zeros de f são -2, 1 e 5, e o coeficiente do seu termo de maior grau é -3, pelo que:

$$f(x)=-3(x+2)(x-1)(x-5)$$

7.3 Para responder a este item podemos escolher a fatorização do polinómio $f(x)$ que acharmos mais conveniente. Nesta resolução vamos usar $f(x)=(x-1)(-3x^2+9x+30)$.

Tem-se que $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(-3x^2+9x+30)\geq 0$.

Já vimos que $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ e que $-3x^2+9x+30=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=5$.

Construindo uma tabela de variação do sinal, vem que:

x	$-\infty$	-2		1		5	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-3x^2+9x+30$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Logo, o conjunto-solução da condição $f(x)\geq 0$ é $]-\infty,-2]\cup[1,5]$.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

8. O resto da divisão inteira de $h(x)$ por x^2-5x é um polinómio do tipo $ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

Assim, se $Q(x)$ for o quociente da divisão inteira de $h(x)$ por x^2-5x, vem:

$$h(x)=Q(x)(x^2-5x)+ax+b$$

Tem-se que $h(0)=3$, dado que o gráfico de h interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3, e o resto da divisão inteira de $h(x)$ por $x-5$ é -2, pelo que $h(5)=-2$. Assim:

$$\begin{cases} h(0)=3 \\ h(5)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(0)(0^2-5\times 0)+a\times 0+b=3 \\ Q(5)(5^2-5\times 5)+a\times 5+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(0)\times 0+b=3 \\ Q(5)\times 0+5a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+b=3 \\ 0+5a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ 5a+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ 5a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

Logo, o resto da divisão inteira de $h(x)$ por x^2-5x é $-x+3$.

FIM

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.