Novo Espaço – Matemática A, 10.º ano

Proposta de resolução do teste de avaliação [março – 2023]

1. $x^2+y^2+4x-2y+1=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2^2-2^2+y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=4$

Trata-se de uma circunferência de centro $(-2,1)$ e raio 2, ou seja, C_1.

Opção: **(A)**

2.

2.1 Equação da reta *BC*: $3y-2x+6=0 \Leftrightarrow 3y=2x-6 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-2$

$C(0,c)$ e pertence à reta *BC*.

Então, $c=-2$. As coordenadas do ponto *C* são $(0,-2)$.

2.2 Equação reduzida da reta *BC*: $y=\frac{2}{3}x-2$. O declive é igual a $\frac{2}{3}$.

Então, $\vec{u}=(3,2)$ é um vetor diretor da reta e $B(3,0)$ é um ponto da reta.

Uma equação vetorial da reta *BC* é: $(x,y)=(3,0)+k(3,2),\ k\in\mathbb{R}$

2.3 Como a circunferência de centro *B* é tangente ao eixo *Oy*, o raio é igual a 3.

Equação da circunferência de centro *B* e raio 3: $(x-3)^2+y^2=9$

Equação da circunferência de centro *A* e raio 1: $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

Equação reduzida da reta *BC*: $y=\frac{2}{3}x-2$

A região colorida é constituída pelos pontos $(x,\ y)$ do plano tais que:

$$(x-3)^2+y^2\le 9 \quad\wedge\quad (x-3)^2+(y-2)^2\ge 1 \quad\wedge\quad y\ge\frac{2}{3}x-2$$

2.4 A reta paralela a *BC* e que passa pelo ponto *A* tem o mesmo declive de *BC*.

$y=\frac{2}{3}x+b$

Como a reta passa por $A(3,2)$, então: $2=\frac{2}{3}\times 3+b \Leftrightarrow 0=b$

Logo, a equação reduzida é $y=\frac{2}{3}x$.

2.5 Seja A_c a área da região colorida.

$$A_c = \frac{\pi \times 3^2}{2} - \pi \times 1^2 = \frac{9}{2}\pi - \pi = \frac{7}{2}\pi \approx 11$$

A medida da área é, aproximadamente, igual a 11.

Opção: **(D)**

3.

3.1 $A(-1,6)$, $B(2,5)$, $C\left(\frac{2}{3},-4\right)$ e $P\left(1-4m\,,\,9m^2-9\right)$, $m \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\,5)-(-1,\,6) = (3,\,-1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} = P - C = (3,\,-1)$$

$$\left(1-4m-\frac{2}{3}\,,\,9m^2-9+4\right) = (3,-1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}-4m,\,9m^2-5\right) = (3,-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}-4m=3 \\ 9m^2-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-12m=9 \\ 9m^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{8}{12} \\ m^2=\frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{2}{3} \\ m=\frac{2}{3} \quad \vee \quad m=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclui-se que $m=-\frac{2}{3}$.

3.2 $A(-1,6)$ e $B(2,5)$. Então, $\overrightarrow{AB} = (3,\,-1)$. O declive de AB é $-\frac{1}{3}$.

A: $(x,\,y) = (1,7) + k(2,-6)$, $k \in \mathbb{R}$ define uma reta com declive –3.

C: $(x,\,y) = (2,5) + k(-1,\,6)$, $k \in \mathbb{R}$ define uma reta com declive –6.

D: $(x,\,y) = (-1,\,6) + k(3,-1)$, $k \in \mathbb{R}$ define a reta AB.

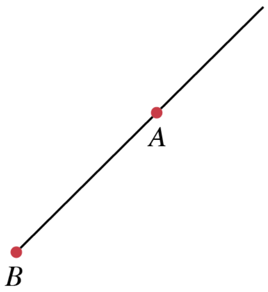
B: $(x,\,y) = (9,\,2) + k(-6,2)$, $k \in \mathbb{R}$ define uma reta com declive $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.
Nenhum dos pontos A e B pertencem a esta reta, pelo que é estritamente paralela a AB.

Opção: **(B)**

3.3 $A(-1,6)$, $B(2,5)$. Então, $\overrightarrow{BA}=(-3,1)$.

$(x,y)=(2,5)+k(-3,1)$, $k\in\mathbb{R}_0^+$

Opção: **(C)**



4.

4.1 $x=3 \quad \wedge \quad z=6 \quad \wedge \quad 0\le y\le 3$

Opção: **(D)**

4.2 Seja $P(x,y,z)$. Pretende-se que $\overline{AP}=\overline{GP}$.

$$(x-3)^2+y^2+z^2=x^2+(y-3)^2+(z-6)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+z^2=x^2+y^2-6y+9+z^2-12z+36$$
$$\Leftrightarrow -6x+6y+12z=36$$
$$\Leftrightarrow -x+y+2z=6$$

4.3 $B(3,3,0)$ e $G(0,3,6)$

$$M\left(\frac{3}{2},3,3\right) \text{ e } \overrightarrow{AM}=M-A=\left(\frac{3}{2},3,3\right)-(3,0,0)=\left(-\frac{3}{2},3,3\right)$$

Reta AM: $(x,y,z)=(3,0,0)+k\left(-\frac{3}{2},3,3\right),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x,y,z)=\left(3-\frac{3}{2}k,3k,3k\right),\ k\in\mathbb{R}$$

A face [$EFGH$] está contida no plano de equação $z=6$.

$3k=6 \Leftrightarrow k=2$. Então, o ponto de interseção é $(0,6,6)$.

5.1 $D'_f=\left[-3{,}5\ ;\ 2\sqrt{5}\right]$

5.2 $f(-\pi)+f\left(-\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)=-2+2\sqrt{5}-(-1)=-2+2\sqrt{5}+1=2\sqrt{5}-1$

Opção: **(C)**

5.3 $f(1)<0 \quad \wedge \quad f(4)<0$

O produto de dois números negativos é positivo, logo $f(1)\times f(4)>0$

A afirmação $f(1)\times f(4)<0$ é **Falsa**.

5.4

x	$-\pi$		-3		-1		3		$\frac{9}{2}$
$f(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	-1

$f(x) \geq 0 \iff -3 \leq x \leq 1 \vee x = 3 \iff -3 \leq x \leq 1 \vee x = 3$

$x \in [-3,1] \cup \{3\}$

5.5 Máximos: 0 e $2\sqrt{5}$

Mínimos: $-3{,}5$; -2 ; -1

Crescente: $\left[-\pi, -\frac{5}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Decrescente: $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e em $\left[3, \frac{9}{2}\right]$

5.6 $f(x) = k$ tem duas e só duas soluções quando $k \in \left]-3{,}5 ; -2\right[\cup \left]0, 2\sqrt{5}\right[$.

5.7 $D_g = \left[0, \frac{9}{2} + \pi\right]$; $D'_g = \left[-7, 4\sqrt{5}\right]$

6. $g(x) = 3x - 12kx + 5 \iff g(x) = (3 - 12k)x + 5$

A função g é decrescente quando $3 - 12k < 0$.

$3 - 12k < 0 \iff k > \frac{1}{4} \iff k \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$