Proposta de teste de avaliação

Matemática A

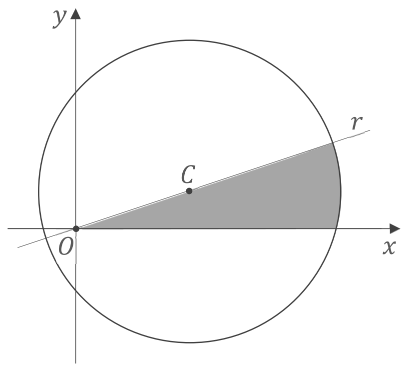
10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. xOy:

- a circunferência definida por:
$$x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$$
- a reta r que contém um diâmetro da circunferência e passa pela origem do referencial;
- uma região a sombreado.



1.1. Verifique que as coordenadas do ponto C, centro da circunferência representada, são $(3\,,1)$.

1.2. Qual das seguintes condições define a região a sombreado?

(A) $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq 3x \quad \wedge \quad y \geq 0$

(B) $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq 3x \quad \wedge \quad y \leq 0$

(C) $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq \frac{1}{3}x \quad \wedge \quad y \leq 0$

(D) $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq \frac{1}{3}x \quad \wedge \quad y \geq 0$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a reta r de equação $(x, y, z) = (-1,2,2) + k(-1,0,3), k \in \mathbb{R}$;
- o ponto A que pertence a r e ao plano yOz;
- o ponto B com coordenadas $(2,1,-5)$.

2.1. Prove que $A(0,2,-1)$.

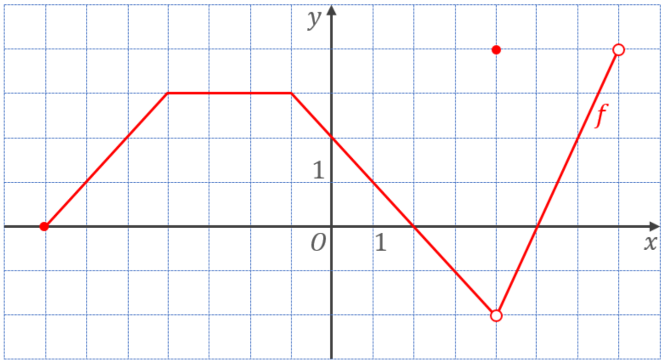
2.2. Qual das seguintes expressões é uma equação do plano perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ e que passa pelo seu ponto médio?

(A) $4x - 2y - 8z - 25 = 0$ **(B)** $2x - y - 4z + 6 = 0$

(C) $x - y + z + 1 = 0$ **(D)** $-x + y - 2z - 16 = 0$

2.3. Verifique se a reta r é estritamente paralela à reta s definida por:
$$(x, y, z) = (-3,2,8) + k(2,0,-6), k \in \mathbb{R}$$

3. Na figura encontra-se representada a função f.



3.1. Indique, relativamente à função f:

a) o domínio;

b) o contradomínio;

c) o(s) zero(s);

d) um intervalo em que f seja positiva e estritamente decrescente;

e) os máximos relativos e os respetivos maximizantes.

3.2. Qual é o conjunto-solução da inequação $f(x) > f(0)$?

(A) $]-5,0[\cup]6,7[$ **(B)** $]-5,0[\cup \{4\} \cup]6,7[$

(C) $[-5,0] \cup [6,7[$ **(D)** $[-5,0] \cup \{4\} \cup [6,7[$

3.3. Considere a função g, definida por $g(x) = f(2x)$.

a) Quais são os zeros de g?

(A) -7, 2 e 5 **(B)** -14, 1 e 10

(C) $-\frac{7}{2}$, 1 e $\frac{5}{2}$ **(D)** -5, 4 e 7

b) Determine o valor de $(f \circ g)(1) + f(4) + h^{-1}(0)$, sendo h a restrição de f ao intervalo $[-1\,,4]$.

(A) 8 **(B)** 6

(C) 4 **(D)** 2

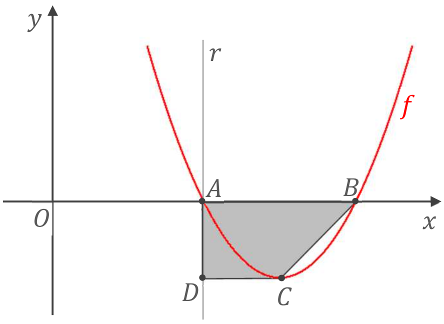
4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$.

Resolva os seguintes itens **sem recorrer à calculadora.**

4.1. Determine o conjunto-solução da inequação $f(x) \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right)$.

4.2. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função f;
- os pontos A e B que pertencem ao gráfico de f e ao eixo Ox;
- a reta r que passa em A e é paralela ao eixo Oy;
- o ponto C, vértice da parábola;
- o ponto D, ponto da reta r com ordenada igual à ordenada do ponto C;
- o trapézio $[ABCD]$.



a) Prove que as coordenadas do ponto C são $(3, -2)$.

b) Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.

5. Um lago tem a capacidade máxima de 600 quilolitros.

Ao longo de um determinado ano bissexto, a quantidade de água desse lago, em quilolitros, foi dada em função do número de dias após o início desse ano, x, por:

$$f(x) = 8{,}5 \times 10^{-5}x^3 - 0{,}04x^2 + 2{,}9x + 480$$

Qual foi a percentagem do número de dias desse ano em que a quantidade de água no lago foi inferior a metade da sua capacidade máxima?

Resolva a questão usando as capacidades gráficas da calculadora.

Na sua resposta, deverá indicar a janela de visualização adequada que utilizou, as representações gráficas obtidas e as coordenadas dos pontos mais relevantes arredondadas às décimas.

Apresente a sua resposta final arredondada às unidades.

FIM

COTAÇÕES

1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	3.3.a)	3.3.b)	4.1.	4.2.a)	4.2.b)	5.	Total
12	8	15	8	25	5+5+3+5+5	8	8	8	25	15	20	25	**200**

Proposta de resolução

1. **1.1.** $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

O ponto C, centro da circunferência, tem coordenadas $(3\,,1)$.

1.2. $\overrightarrow{OC}$ é um vetor diretor da reta r

$\overrightarrow{OC} = C - O = (3,1) - (0,0) = (3,1)$

Equação reduzida da reta r:

$y = mx + b$

$m = \frac{1}{3}$ porque $\overrightarrow{OC} = (3,1)$

$b = 0$ porque a reta r passa na origem do referencial

$r\colon y = \dfrac{1}{3}x$

A região está contida no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência, pelo eixo Ox e pela reta r. Uma condição que a define é:

$x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq \dfrac{1}{3}x \quad \wedge \quad y \geq 0$

Resposta: (D)

2. **2.1.** $r\colon (x,y,z) = (-1,2,2) + k(-1,0,3), k \in \mathbb{R};$

$A(0,y,z)$: A pertence ao plano yOz

Como $A \in r$, vem

$$(0,y,z) = (-1,2,2) + k(-1,0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 - k \\ y = 2 \\ z = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 + 3 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$A(0,2,-1)$

2.2. Pretende-se determinar uma equação do plano mediador de $[AB]$.

Sendo $A(0,2,-1)$, $B(2,1,-5)$ e $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador de $[AB]$, este plano é definido por:

$x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 4y + 2y + 2z - 10z + 4 + 1 - 4 - 1 - 25 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 2y - 8z - 25 = 0$

Resposta: (A)

2.3. Para serem estritamente paralelas, os vetores diretores das retas têm de ser colineares e as retas não podem ter pontos em comum.

Vetor diretor da reta r: $\vec{r} = (-1,0,3)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{s} = (2,0,-6)$

Como $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} \wedge 0 = 0$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares.

Sabemos que o ponto de coordenadas $(-3,2,8)$ pertence à reta s. Vejamos se também pertence à reta r.

$(-3,2,8) = (-1,2,2) + k(-1,0,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -1 - k \\ 2 = 2 \\ 8 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ 2 = 2 \\ k = 2 \end{cases}$

Conclui-se que o ponto de coordenadas $(-3,2,8)$ pertence às duas retas.

Portanto, como as retas r e s têm a mesma direção e um ponto comum, são coincidentes. Logo, não são estritamente paralelas.

3. **3.1.** **a)** $D_f = [-7, 7[$

b) $D'_f =]-2, 4]$

c) Zeros: -7, 2 e 5

d) $[-1\,, 2[$, por exemplo

e) Máximos relativos: 3 e 4

Maximizantes: $[-4, -1]$ e 4 , respetivamente

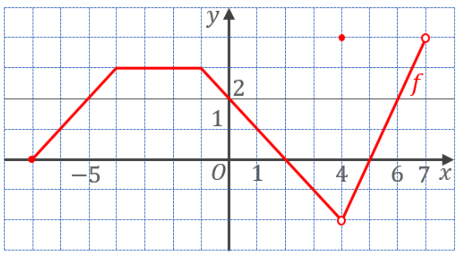
3.2. $f(0) = 2$

$f(x) > f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]-5, 0[\cup \{4\} \cup]6,7[$

Resposta: (B)



3.3. **a)** Zeros de f: -7, 2 e 5.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -7 \vee 2x = 2 \vee 2x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = 1 \vee x = \frac{5}{2}$

Resposta: (C)

b) $(f \circ g)(1) + f(4) + h^{-1}(0) =$

$= f\big(g(1)\big) + 4 + 2 =$

$= f\big(f(2)\big) + 6 =$

$= f(0) + 6 =$

$= 2 + 6 = 8$

$f(4) = 4$

$h^{-1}(0) = 2$ porque $f(2) = 0$

$g(1) = f(2)$

$f(2) = 0$

$f(0) = 2$

Resposta: (A)

4. $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

4.1. $f(x) \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 \geq -4\left(x - \dfrac{13}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 \geq -4x + 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$

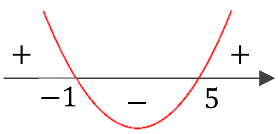
Cálculo auxiliar:

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-5)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$



$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$

Conjunto-solução: $S = \,]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$

4.2. **a)** $f(x) = 2x^2 - 12x + 16 = 2(x^2 - 6x) + 16 =$

$= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 16 =$

$= 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 16 =$

$= 2(x - 3)^2 - 2$

O vértice da parábola, C, tem coordenadas $(3, -2)$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

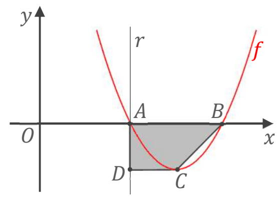
$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

$A(2, 0)$ e $B(4, 0)$

$C(3, -2)$ Vértice da parábola

$D(2, -2)$ D tem a abcissa de A e a ordenada de C



$$\text{Área} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{DA} =$$

$$= \frac{(4-2) + (3-2)}{2} \times |-2-0|$$

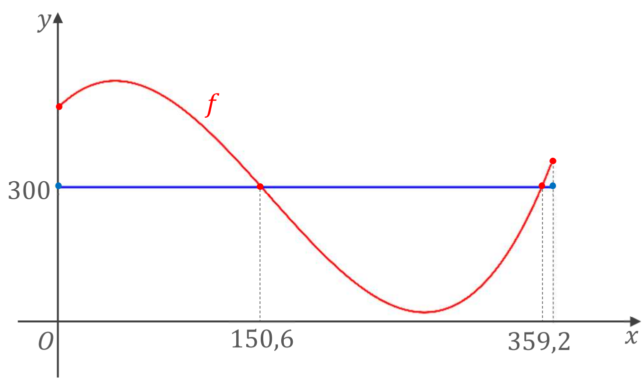
$$= \frac{2+1}{2} \times 2 = 3$$

$\text{Área}_{[ABCD]} = 3$ u. a.

5. $f(x) = 8{,}5 \times 10^{-5}x^3 - 0{,}04x^2 + 2{,}9x + 480$

Recorrendo à calculadora gráfica, fizemos $Y_1 = f(x)$ e $Y_2 = 300$

Visualizamos, no intervalo $[0, 366]$, os gráficos de Y_1 e Y_2 e determinamos as coordenadas do seu ponto de interseção. Foi obtido o seguinte resultado:



Podemos, assim, concluir que a quantidade de água no lago foi inferior a 300 kl durante, aproximadamente, $359{,}2 - 150{,}6 = 208{,}6$ dias.

Portanto, a quantidade de água no lago foi inferior a metade da sua capacidade máxima durante cerca de 57% dos dias do ano.

Cálculo auxiliar:

366 dias — 100%

208,6 dias — x %

$$x = \frac{208{,}6 \times 100}{366} \approx 57$$