Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Porto Editora

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. De uma função f, injetiva, de domínio $\{1,2,3\}$ e conjunto de chegada $\{1,2,4\}$, sabe-se que:

- $f(1) = 1$;
- $f(2) = f(1) + 1$.

Qual é a imagem de 3 por f?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Considere as funções f e g, definidas por:

$$G_f = \{(1,3); (2,1); (3,2)\}$$

$$\begin{aligned} g\colon \{0,1,2\} &\to \{1,2,3\} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

$(f^{-1} \circ g)(1)$ é igual a:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

3. Considere, num referencial o.n. xOy, os pontos A e B de coordenadas $(2, 3)$ e $(2, -1)$, respetivamente.

Qual das seguintes condições define a mediatriz de $[AB]$?

(A) $x = 2$ **(B)** $y = 2$

(C) $y = x + 1$ **(D)** $(x, y) = (2,1) + k(1,0), k \in \mathbb{R}$

4. Num referencial o.n. xOy, considere a circunferência definida por $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

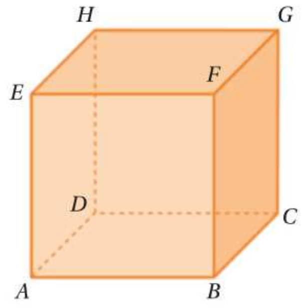
Seja A o ponto da circunferência com coordenadas $(1,1)$.

Quais são as coordenadas de B, sabendo que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência?

(A) $(-5, 5)$ **(B)** $(-1, 2)$

(C) $(-3, -5)$ **(D)** $(-2, 5)$

5. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.



Qual das seguintes igualdades é falsa?

(A) $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$

(B) $A + \overrightarrow{EG} = C$

(C) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FE}$

(D) $E - D = \overrightarrow{CF}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto A de coordenadas $(1, 2)$ e a reta r de equação vetorial $(x, y) = (0, 5) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$.

6.1. Verifique se A pertence a r.

6.2. Seja P o ponto da reta r com ordenada igual a 7.

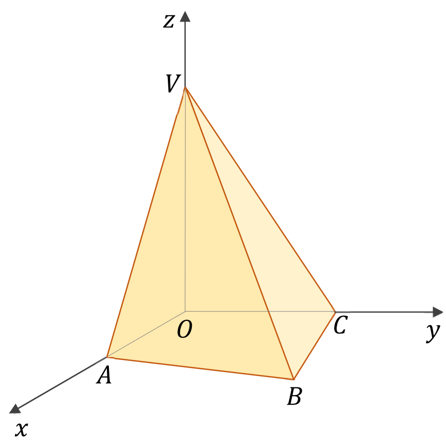
Calcule $\|\overrightarrow{AP}\|^2$.

6.3. Determine uma equação da circunferência de centro no ponto de interseção da reta r com a reta s, definida por $y = 3x$, e que é tangente ao eixo Ox.

7. Na figura, está representado, em referencial $o.n.\, Oxyz$, a pirâmide quadrangular $[OABCV]$.

Sabe-se que:

- $A(2,0,0)$;
- $C(0,2,0)$;
- $[OABC]$ está contido em xOy;
- V é um ponto do eixo Oz;
- $BV: (x, y, z) = (3,3,0) + k(1,1,-1), k \in \mathbb{R}$.



7.1. Verifique se B pertence ao plano mediador de $[AC]$.

7.2. Prove que $V(0,0,3)$.

7.3. Calcule o volume da pirâmide $[OABCV]$.

8. Num jogo de computador, trava-se uma Batalha Naval entre dois Impérios: o Império X e o Império Y.

8.1. Na armada do Império X, existe um navio com o Centro de Comunicações de toda a operação que, dotando o campo de batalha com um referencial o.n. $Oxyz$ do espaço em que a unidade é o quilómetro, está parado no ponto de coordenadas $(2\,,-1\,,0)$. Represente-se esse ponto pela letra C.

a) O Centro de Comunicações possui um radar que consegue detetar todo o movimento que exista à sua volta, no ar ou até no mar, até um raio de 70 km, inclusive.
Escreva uma condição que represente o conjunto de pontos que o radar consegue detetar.
Identifique esse lugar geométrico.

b) Um submarino do Império Y vai lançar um torpedo com a direção do vetor $(-9\,,-20\,,10)$ contra o Império rival. Represente-se a localização do ponto de partida do torpedo pela letra S com as coordenadas $(20\,,\ 40\,,-30)$.
Verifique se esse torpedo pode atingir o navio com o Centro de Comunicações do Império X.

8.2. No final da batalha, foi avistado um homem do Império Y no mar.
O alerta enviado dizia que ele estava à superfície da água, a uma distância de pelo menos 10 km, mas não superior a 12 km, de um bombardeiro localizado na origem de um referencial o.n. do plano xOy, cuja unidade é o quilómetro.
Defina, por uma condição no plano, a região onde está o homem em apuros.
Qual é a área dessa região?

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	7.3.	8.1.a).	8.1.b)	8.2.	Total
15	20	20	15	20	15	15	20	20	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $f(1) = 1$;

$f(2) = f(1) + 1 = 1 + 1 = 2$.

Como f é injetiva, $f(3) \neq 1$ e $f(3) \neq 2$.

$f(3) \neq 3$ porque 3 não pertence ao conjunto de chegada.

Logo, $f(3) = 4$

Resposta: (D)

2. $(f^{-1} \circ g)(1) = f^{-1}\big(g(1)\big) = f^{-1}(2) = 3$

$f(3) = 2$. Logo, $f^{-1}(2) = 3$

$g(1) = 1 + 1 = 2$

Resposta: (D)

3. $A(2,3)$, $B(2,-1)$

Os pontos A e B pertencem à reta vertical de equação $x = 2$.

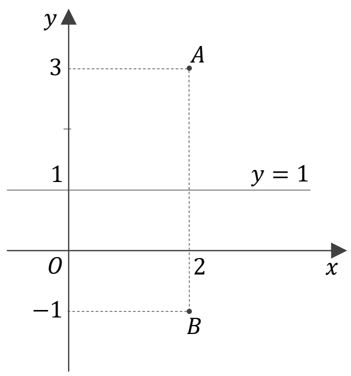
A mediatriz de $[AB]$ é a reta horizontal que passa no ponto médio de $[AB]$. Logo, esta reta pode ser definida pela equação

$y = \frac{3-1}{2} \Leftrightarrow y = 1$

A reta de equação $y = 1$ passa no ponto de coordenadas $(2,1)$ e, por ser uma reta horizontal, tem a direção do vetor $(1,0)$.

Logo, esta reta pode ser definida pela equação vetorial

$(x, y) = (2,1) + k(1,0), k \in \mathbb{R}$.



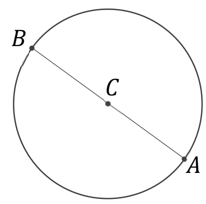
Resposta: (D)

4. Centro da circunferência: $C(-2, 3)$

$A(1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,3) - (1,1) = (-3,2)$

$B = C + \overrightarrow{AC} = (-2,3) + (-3,2) = (-5,5)$



Resposta: (A)

5. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{FE}$

Resposta: (C)

6. $A(1,2)$; $r\colon\ (x,y) = (0,5) + k(-1,2), k \in \mathbb{R}$.

6.1. $(1,2) = (0,5) + k(-1,2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -k \\ 2 = 5 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases}$ Condição impossível. Logo, $A \notin r$.

6.2. $P(x,7) \in r$

$(x,7) = (0,5) + k(-1,2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ 7 = 5 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = 1 \end{cases}$, logo $P(-1,7)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (-1,7) - (1,2) = (-2,5)$

$\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \left(\sqrt{(-2)^2 + 5^2}\right)^2 = 4 + 25 = 29$

6.3. Declive de $r = m_r = \frac{2}{-1} = -2$

Como $(0,5) \in r$ e tem abcissa nula, a ordenada na origem é igual a 5.

Equação reduzida da reta r: $y = -2x + 5$

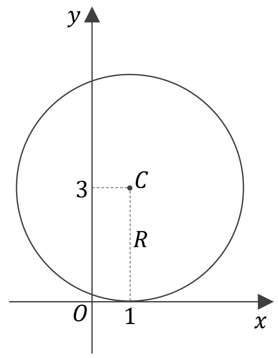
$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2x + 5 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

$C(1,3)$ é o centro da circunferência.

Como a circunferência é tangente ao eixo Ox, o seu raio é 3.

Logo, $R = 3$ e $R^2 = 3^2 = 9$.

Equação pedida: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$



7. $A(2,0,0)$; $C(0,2,0)$; $BV\colon (x,y,z) = (3,3,0) + k(1,1,-1), k \in \mathbb{R}$

7.1. Como $[OABC]$ está contido no plano xOy, a cota do ponto B é 0.

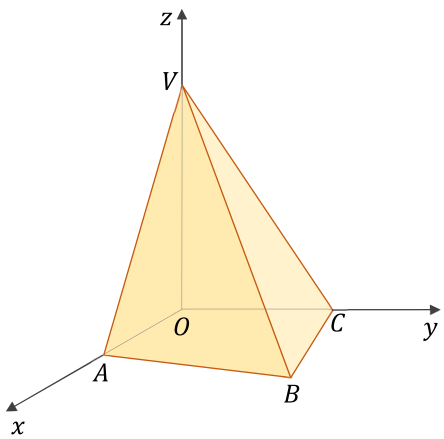
Resulta da equação dada que o ponto da reta BV com cota nula tem coordenadas $(3,3,0)$. Logo, $B(3,3,0)$.

$\overline{BA} = \sqrt{(3-2)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-2)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$



Como $\overline{BA} = \overline{BC}$, o ponto B pertence ao plano mediador de $[AC]$.

7.2. $V(0,0,z)$ porque V é um ponto do eixo Oz.

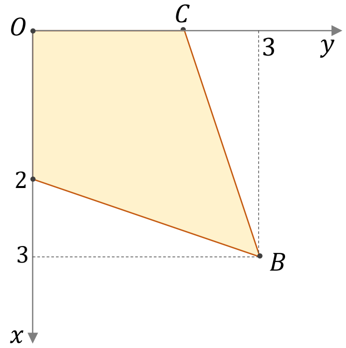
Como $V \in VB$, temos

$(0,0,z) = (3,3,0) + k(1,1,-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + k \\ 0 = 3 + k \\ z = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ z = 0 - (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

$V(0,0,3)$

7.3. $V = \frac{1}{3} \times$ área da base $\times$ altura



Área da base $= 3^2 - 2 \times \frac{1 \times 3}{2} = 9 - 3 = 6$

Altura $= \overline{OV} =$ cota de $V = 3$

$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 = 6$ u. v.

8. **8.1.** **a)** $70^2 = 4900$

Condição: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 4900$

Esfera de centro $C(2,-1,0)$ e raio $r = 70$ km

b) $\vec{u} = (-9,-20,10)$; $S(20,40,-30)$; $C(2,-1,0)$

A trajetória do torpedo parte de S e tem a direção do vetor $\vec{u}$. Logo, esta trajetória está contida na reta definida por

$$(x,y,z) = (20,40,-30) + k(-9,-20,10), k \in \mathbb{R}$$

Verifiquemos se $C(2,-1,0)$ é um ponto desta trajetória:

$(2,-1,0) = (20,40,-30) + k(-9,-20,10) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2 = 20 - 9k \\ -1 = 40 - 20k \\ 0 = -30 + 010k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 = -9k \\ -41 = -20k \\ 30 = 10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{41}{20} \\ k = 3 \end{cases}$$ Sistema impossível

Como $C(2,-1,0)$ não está na trajetória do torpedo, fica provado que não atinge o Centro de Comunicações.

8.2. Como $10^2 = 100$ e $12^2 = 144$ a região em causa é a coroa circular definida pela condição $100 \leq x^2 + y^2 \leq 144$

Área $= \pi \times 12^2 - \pi \times 10^2 = 144\pi - 100\pi = 44\pi$ km^2