Proposta de teste de avaliação

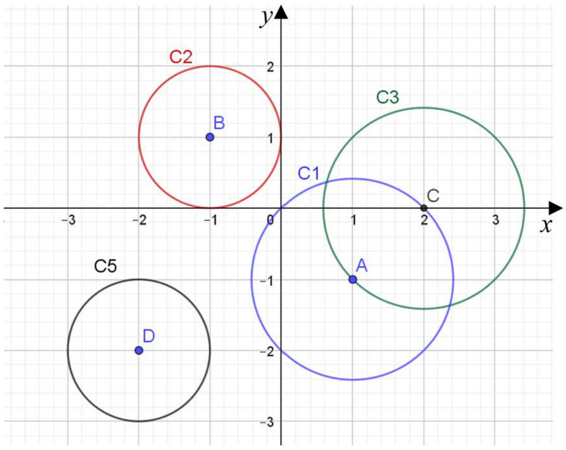
Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** MAIO 2024

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. No referencial da figura, estão representadas as circunferências C_1, C_2, C_3 e C_4.



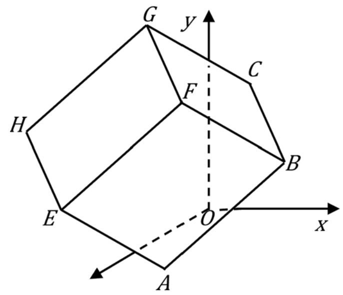
Qual das circunferências pode ser caracterizada pela condição $x^2+y^2-2x+2y=0$?

(A) C_1 **(B)** C_2 **(C)** C_3 **(D)** C_4

2. Considere, num referencial ortonormado $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

As coordenadas dos pontos *A, C* e *G* são respetivamente iguais a $(8,3,0)$, $(2,3,6)$ e $(6,1,10)$.

O ponto *D* não é visível na figura.



2.1. Quais são as coordenadas do ponto *E* ?

(A) $(12,1,4)$ **(B)** $(4,5,-4)$

(C) $(-4, 2, -4)$ **(D)** $(4, -2, 4)$

2.2. Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AG]$.

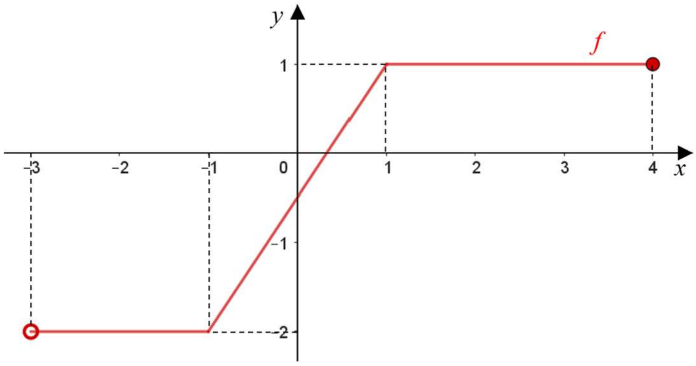
2.3. Seja *r* a reta de equação $(x,y,z)=(6,1,10)+k(1,1,-5),k\in\mathbb{R}$.

Mostre que:

a) a reta *r* e a reta *AG* são paralelas.

b) determine as coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com o plano *xOy*.

3. Considere o gráfico cartesiano da função f, de domínio $]-3,4]$, representado num referencial o. n. Oxy.



3.1. Escreva uma expressão algébrica que defina a função f.

3.2. Determine:

a) $f(\pi)$

b) o conjunto-solução da equação $f(x)=-1$.

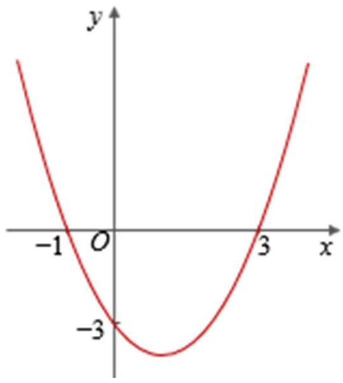
3.3. Indique:

a) os intervalos de maior amplitude onde a função f é decrescente em sentido lato;

b) os mínimos relativos de f e os respetivos minimizantes.

4. Considere, na figura, a função quadrática, f, representada num referencial o. n. Oxy, e a função g, definida por $g(x)=\sqrt{x}$.

O gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas -1 e 3 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3



4.1. Justifique que a função f não é injetiva.

4.2. Qual dos seguintes conjuntos corresponde ao domínio da função $g \circ f$?

(A) $]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ **(B)** $[-1, 3]$

(C) $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$ **(D)** $]-1, 3[$

5. De uma função f, definida em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

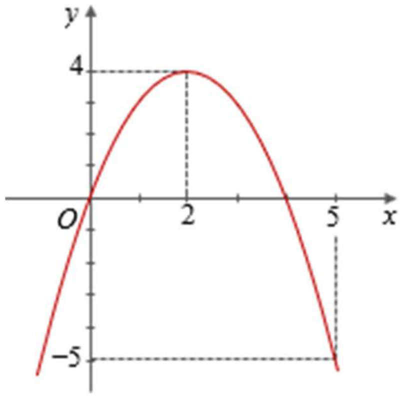
- é bijetiva e ímpar;
- $f^{-1}(3)=-2$

Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=\frac{1}{3}f(x+2)$.

Qual é a imagem por g de 0 ?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 2 **(D)** 3

6. Na figura, está representada, num referencial o. n. Oxy parte da parábola que é o gráfico de uma função *f*.



Sabe-se que:

- a parábola passa no ponto de coordenadas $(5,-5)$;
- os zeros de *f* são 0 e 4.

6.1. Mostre que a função *f* é definida por $-(x-2)^2+4$.

6.2. Determine os valores de *x* que satisfazem a condição $f(x)\geq 3$.

6.3. Considere a função *g*, definida por $g(x)=-4+f(x+3)$.

a) Determine o contradomínio de *g*.

b) Determine os zeros de *g*.

6.4. Considere a função *h*, definida por $h(x)=|x-1|-2$.

O gráfico de *h* interseta o gráfico de *g* nos pontos *A* e *B*, sendo o ponto *A* o de menor abcissa.

Usando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine $\overline{AB}$.

Na sua resposta:

- indique as coordenas de *A* e de *B*, com arredondamento às centésimas;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às décimas.

FIM

Cotações

1.	2.1.	2.2.a)	2.2.b)	3.1.	3.2.a)	3.2.b)	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	6.3.a)	6.3.b)	6.4.	Total
10	10	16	16	16	12	14	12	10	10	16	16	12	14	16	200

Proposta de resolução

1. $x^2+y^2-2x+2y=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=0+1+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2$

Resposta: (A)

2.1. $A(8,3,0)$, $C(2,3,6)$ e $G(6,1,10)$

$E=A+\overrightarrow{CG}=(8,3,0)+(4,-2,4)=(12,1,4)$

$\overrightarrow{CG}=G-C=(6,1,10)-(2,3,6)=(4,-2,4)$

Resposta: (A)

2.2. $(x-8)^2+(y-3)^2+z^2=(x-6)^2+(y-1)^2+(z-10)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-16x+64+y^2-6y+9+z^2=x^2-12x+36+y^2-2y+1+z^2-20z+100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16x+12x-6y+2y+20z+64+9-36-1-100=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x-4y+20z-64=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y-5z+16=0$

Uma equação do plano mediador é $x+y-5z+16=0$ (ou equivalente).

2.3.

a) $\overrightarrow{AG}$ é um vetor diretor da reta *AG*.

$\overrightarrow{AG}=G-A=(6,1,10)-(8,3,0)=(-2,-2,10)$

O vetor de coordenadas $\vec{r}=(1,1,-5)$ é um vetor diretor da reta *r*.

$\frac{-2}{1}=\frac{-2}{1}=\frac{10}{-5}=-2$

Como $\overrightarrow{AG}=-2\vec{r}$, então os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\vec{r}$ são colineares, pelo que a reta *r* e a reta *AG* são paralelas.

b) Plano xOy é definido pela equação $z=0$.

$(x,y,z)=(6,1,10)+k(1,1,-5), k\in\mathbb{R} \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=6+k \wedge y=1+k \wedge 0=10-5k \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=2 \wedge x=6+2 \wedge y=1+2 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=2 \wedge x=8 \wedge y=3 \wedge z=0$

A reta *r* interseta o plano xOy no ponto de coordenadas $(8,3,0)$.

3.1. A função *f* é composta por três ramos:

- $]-3,-1]$: função constante ($f(x)=-2$)
- $[1,\ 4]$: função constante ($f(x)=1$)
- $]-1,\ 1[$: função afim (definida por $f(x)=mx+b; m,b\in\mathbb{R}$);

$f(x)=mx+b$

O segmento de reta está contido na reta que passa nos pontos de coordenadas $(-1,-2)$ e $(1,1)$.

$$m=\frac{1-(-2)}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$$

$$1=\frac{3}{2}\times 1+b \Leftrightarrow 1-\frac{3}{2}=b \Leftrightarrow -\frac{1}{2}=b$$

Logo, $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{se } -3<x\leq -1 \\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2} & \text{se } -1<x<1 \\ 1 & \text{se } 1\leq x\leq -1 \end{cases}$ (por exemplo)

3.2. **a)** $f(\pi)=1$

b) A equação $f(x)=-1$ tem uma solução em $]-1,1[$:

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow 3x-1=-2 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Logo, o conjunto-solução da equação é $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

3.3. **a)** A função *f* é decrescente em sentido lato em $]-3,-1]$ e em $[1,4]$.

b) Os mínimos relativos de *f* são:

- -2, cujos minimizantes pertencem ao intervalo $]-3,-1]$;
- 1, cujos minimizantes pertencem ao intervalo $]1,4]$.

4.1. A função *f* não é injetiva, porque, por exemplo, $f(-1)=f(3)=0$.

4.2. $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge f(x)\geq 0\}=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$

5. Como a função *f* é bijetiva e ímpar, $f(-2)=3$ e $f(2)=-3$.

Assim, sendo $g(x)=\frac{1}{3}f(x+2)$, vem $g(0)=\frac{1}{3}f(0+2)=\frac{1}{3}f(2)=\frac{1}{3}f(2)=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$.

Resposta: (B)

6.1. $f(x)=ax(x-4)$

$f(5)=-5 \Leftrightarrow a\times 5(5-4)=-5 \Leftrightarrow 5a=-5 \Leftrightarrow a=-1$

Logo,

$f(x)=-x(x-4)=-(x^2-4x)=-(x^2-4x+4-4)=-(x^2-4x+4)+4=$

$=-(x-2)^2+4$

6.2. $f(x)\geq 3 \Leftrightarrow -(x-2)^2+4\geq 3 \Leftrightarrow -(x-2)^2+1\geq 0$

$-(x-2)^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=1 \vee x-2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=1$

O conjunto-solução da inequação é $S=[1,\ 3]$.

6.3.

a) $D'_f=]-\infty,4]$

$D'_g=]-\infty,-4+4]=]-\infty,0]$

b) $g(x)=0 \Leftrightarrow -4+f(x+3)=0 \Leftrightarrow f(x+3)=4$

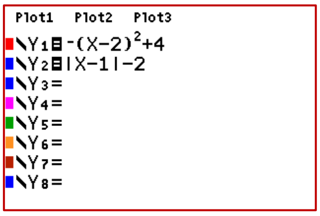
Há um único ponto do gráfico da função *f* que tem ordenada 4. Trata-se do vértice da parábola que representa a função *f*, de coordenadas $(2,4)$.

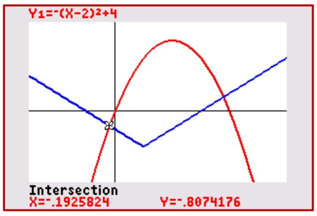
Logo, $x+3=2 \Leftrightarrow x=-1$.

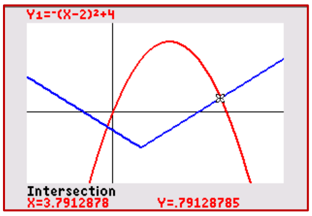
Portanto, o único zero da função *g* é -1 .

6.4. Na calculadora gráfica:

- $y_1=f(x)$
- $y_2=h(x)$







As coordenadas dos pontos de interseção, com arredondamento às centésimas, são:

$A(-0{,}19;-0{,}81)$ e $B(3{,}79;0{,}79)$

Assim, $\overline{AB}\approx\sqrt{(3{,}79+0{,}19)^2+(0{,}79+0{,}81)^2}\approx 4{,}3$.