Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

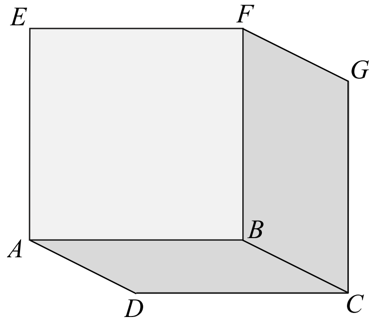
1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β definidos pelas equações $x=-2$ e $y=1$.

Qual das seguintes superfícies esféricas, definidas pelas respetivas equações, é tangente aos planos α e β?

(A) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=1$ **(B)** $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=1$

(C) $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=1$ **(D)** $x^2+y^2+z^2=1$

2. Considere, fixado um referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$, ilustrado na figura ao lado, tal que:



- o ponto A tem coordenadas $(2\ ,\ -1\ ,\ 0)$;
- o vetor $\overrightarrow{BG}$ tem coordenadas $(-1\ ,\ 2\ ,\ 3)$.

Em qual das opções seguintes estão representadas as coordenadas do ponto H (não visível na figura)?

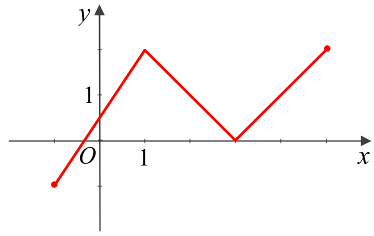
(A) $(1\ ,\ 1\ ,\ 3)$ **(B)** $(3\ ,\ -3\ ,\ -3)$ **(C)** $(-3\ ,\ 3\ ,\ 3)$ **(D)** $(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

3. Considere a reta r definida pela equação $y=-\frac{1}{2}x+3$. Qual das opções seguintes define a equação vetorial de uma reta estritamente paralela à reta r?

(A) $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 3)+k(-1\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$ **(B)** $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 0)+k(6\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

(C) $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 3)+k(2\ ,\ -1),\ k\in\mathbb{R}$ **(D)** $(x\ ,\ y)=(2\ ,\ 2)+k\left(1\ ,\ -\frac{1}{2}\right),\ k\in\mathbb{R}$

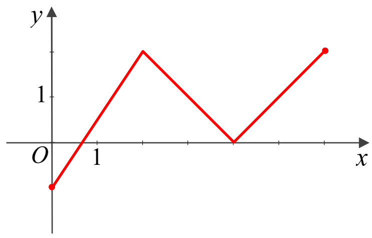
4. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura ao lado.



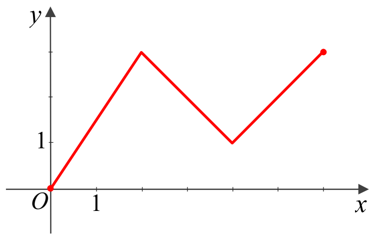
Seja h a função definida por $h(x) = f(x+1) - 1$.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?

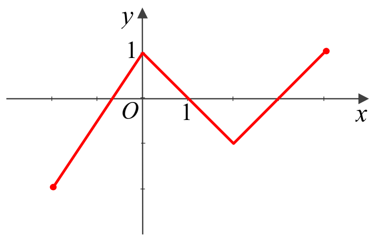
(A)



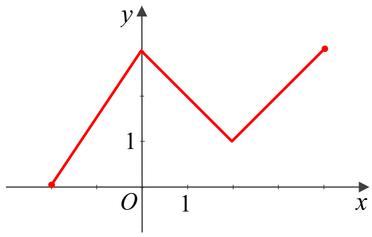
(B)



(C)



(D)



5. Para cada valor real de k , a expressão $P(x) = x^4 - kx^2 + 2x - 3$ é um polinómio do quarto grau. Para que o polinómio seja divisível por $2x - 6$, qual deverá ser o valor de k ?

(A) -3 **(B)** 28 **(C)** $-\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{28}{3}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere o polinómio $P(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 8x + 4$.

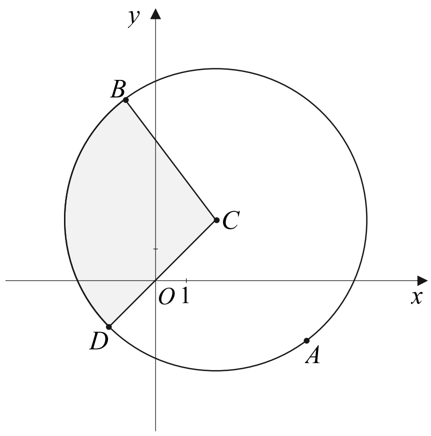
6.1. Mostre que 1 é uma raiz dupla do polinómio.

6.2. Determine a e b , com $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $P(x) = -(x-1)^2 (x-a)(x-b)$.

6.3. Resolva a inequação $P(x) \leq 0$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

7. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro $C(2\ ,\ 2)$ e raio 5.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e D pertencem à circunferência;
- os pontos A e B têm coordenadas $(5\ ,\ -2)$ e $(-1\ ,\ 6)$, respetivamente;
- o ponto D pertence ao terceiro quadrante e é um dos pontos de interseção da reta OC com a circunferência.

7.1. Mostre que:

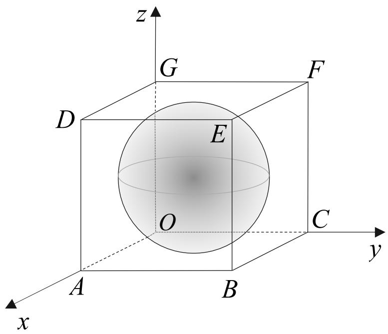
a) $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;

b) a reta CD é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

7.2. Determine as coordenadas do ponto D.

7.3. Defina por uma condição a parte a sombreado da figura, incluindo a fronteira.

8. Considere, num referencial o.n. xOy, uma esfera S tangente às faces de um cubo $[ABCODEFG]$.



Sabe-se que:

- as arestas do cubo $[OA]$, $[OC]$ e $[OG]$ estão contidas nos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto E tem coordenadas $(4\ ,\ 4\ ,\ 4)$;
- a esfera S pode ser definida pela inequação $x^2+y^2+z^2-4(x+y+z-2)\leq 0$.

8.1. Defina, através de uma condição, a aresta $[EF]$.

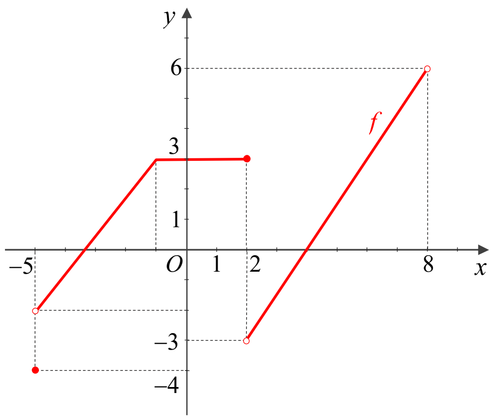
8.2. Defina por uma condição o plano mediador de $[EG]$.

8.3. Mostre que os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ são colineares.

8.4. Mostre que a esfera S tem centro no ponto de coordenadas $(2\ ,\ 2\ ,\ 2)$ e raio igual a 2.

8.5. Identifique o lugar geométrico dos pontos definidos pela interseção do plano de equação $z=1$ com a esfera S.

9. Considere o gráfico cartesiano da função f, de domínio $[-5\ ,\ 8[$, representado num referencial cartesiano xOy.



9.1. Indique:

a) o contradomínio de f;

b) o intervalo de maior amplitude onde f é crescente em sentido lato;

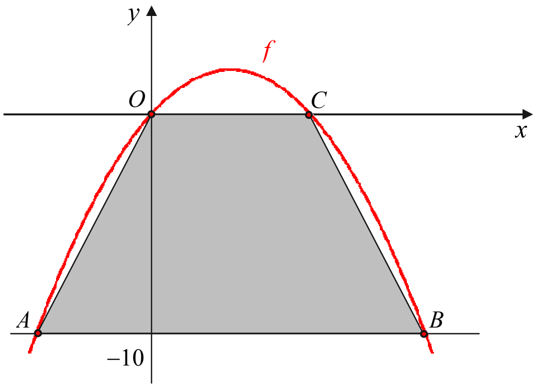
c) o conjunto dos minorantes de f;

d) os máximos relativos de f e os respetivos maximizantes.

9.2. Determine os zeros de f.

9.3. Determine o domínio da função h definida por $h(x)=2-f(2x)$.

10. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico cartesiano da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-\frac{2}{9}(x-3)^2+2$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y=-10$;
- os pontos O e C são pontos da interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

10.1. Determine o contradomínio de f.

10.2. Mostre que 0 e 6 são zeros de f.

10.3. Calcule a área do trapézio $[ABCO]$.

10.4. Resolva a inequação $f(x)<g(x)$, sendo $g(x)=\frac{10}{9}x$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
6	6	6	6	6	**30**

Grupo II

6.1.	6.2.	6.3.	7.1.a)	7.1.b)	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.	8.3.	8.4.	8.5.
8	8	10	6	6	8	10	6	10	8	8	10

9.1.a)	9.1.b)	9.1.c)	9.1.d)	9.2.	9.3.	10.1.	10.2.	10.3.	10.4.	Total
6	6	6	8	8	6	6	6	10	10	**170**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Centro da superfície esférica: $C(-1\ ,\ 0\ ,\ -2)$

Raio da superfície esférica: $r=1$

Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos aos planos coordenados são os planos de equações:

$x=-1-1=-2$ e $x=-1+1=0$

$y=0-1=-1$ e $y=0+1=1$

$z=-2-1=-3$ e $z=-2+1=-1$

Resposta: **(C)**

2. $H=A+\overrightarrow{BG}=(2\ ,\ -1\ ,\ 0)+(-1\ ,\ 2\ ,\ 3)=(1\ ,\ 1\ ,\ 3)$

Resposta: **(A)**

3. Reta de equação: $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 0)+k(6\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

Vetor diretor: $(6\ ,\ -3)$

Declive: $-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ (igual ao da reta r)

As retas têm o mesmo declive, logo são paralelas.

Como o ponto $(0\ ,\ 0)$ não pertence à reta r então as retas são estritamente paralelas.

Resposta: **(B)**

4. O gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1\ ,\ 0)$ seguida da translação de vetor $\vec{v}(0\ ,\ -1)$.

Resposta: **(C)**

5. Aplicando o teorema do resto:

$P(3)=0\Leftrightarrow 3^4-k\times3^2+2\times3-3=0$

$\Leftrightarrow 81-9k+6-3=0\Leftrightarrow -9k=-84\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{84}{9}\Leftrightarrow k=\frac{28}{3}$

Resposta: **(D)**

GRUPO II

6.1. 1 é uma raiz dupla do polinómio (ou raiz de multiplicidade 2) se e só se 2 é o maior número natural para o qual existe um polinómio $Q(x)$ tal que $P(x)=(x-1)^2\times Q(x)$.

Por aplicação da Regra de Ruffini:

	−1	2	3	−8	4
1		−1	1	4	−4
	−1	1	4	−4	0
1		−1	0	4	
	−1	0	4	0	

Assim, $P(x)=(x-1)^2\times(-x^2+4)=-(x-1)^2\times(x^2-4)=-(x-1)^2\times(x-2)\times(x+2)$ e, consequentemente, 1 é uma raiz dupla de $P(x)$.

6.2. Recorrendo à alínea anterior tem-se que:

$P(x)=-(x-1)^2(x-2)(x+2)$, ou seja, $a=2$ e $b=-2$ ou $a=-2$ e $b=2$.

6.3.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$-(x-1)^2$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Resposta: $x\in\left]-\infty\,,\,-2\right]\cup\{1\}\cup\left[2\,,\,+\infty\right[$

7.1. a) $M_{[AB]}\left(\frac{5+(-1)}{2}\,,\,\frac{-2+6}{2}\right)$ ou seja $M_{[AB]}(2\,,\,2)$

Sabe-se que A e B pertencem à circunferência e $C(2\,,\,2)$ é o ponto médio de $[AB]$. Assim $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

b) $m_{CD}=\frac{2-0}{2-0}=1$ e $(0\,,\,0)$ pertence à reta CD.

Então, a reta CD tem equação: $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

7.2. O ponto D é o ponto de interseção da reta CD com a circunferência de centro $(2\,,\,2)$ e raio 5.

$$y=x\wedge(x-2)^2+(y-2)^2=25$$

$$\Leftrightarrow y=x\wedge(x-2)^2+(x-2)^2=25$$

$$\Leftrightarrow y=x\wedge(x-2)^2=\frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=x\wedge x-2=\pm\sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y=x\wedge x=2\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=x\wedge\left(x=2-\frac{5\sqrt{2}}{2}\vee x=2+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como D pertence ao terceiro quadrante:

$$D\left(2-\frac{5\sqrt{2}}{2}\,,\,2-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

7.3. Reta BC: $m=\frac{6-2}{-1-2}=-\frac{4}{3}$

$$y=-\frac{4}{3}x+b$$

$$2=-\frac{4}{3}\times2+b\Leftrightarrow b=2+\frac{8}{3}\Leftrightarrow b=\frac{14}{3}$$

Equação da reta BC: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{14}{3}$

Condição: $(x-2)^2+(y-2)^2\le25\wedge y\ge x\wedge y\le-\frac{4}{3}x+\frac{14}{3}$

8.1. $y = 4 \wedge z = 4 \wedge 0 \le x \le 4$

8.2. Seja $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$ um ponto pertencente ao plano mediador de $[EG]$.

$$\overline{PE} = \overline{PG} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -8x - 8y + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

Por exemplo, $x + y - 4 = 0$.

8.3. $\overrightarrow{AF} = F - A = (0\ ,\ 4\ ,\ 4) - (4\ ,\ 0\ ,\ 0) = (-4\ ,\ 4\ ,\ 4)$

Como $(-4\ ,\ 4\ ,\ 4) = -8\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$, ou seja,

se $\overrightarrow{AF} = -8\vec{u}$, então $\overrightarrow{AF}$ e $\vec{u}$ são colineares.

8.4. $x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z - 2) \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 8 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 + (z-2)^2 - 4 + 8 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \le 4$$

Assim, o centro tem coordenadas $(2\ ,\ 2\ ,\ 2)$ e o raio é 2.

8.5. A interseção da esfera S com o plano $z = 1$, pode ser definida por:

$$z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + (1-2)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + 1 \le 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 3$$

Trata-se do círculo de centro $(2\ ,\ 2\ ,\ 1)$ e raio $\sqrt{3}$ contido no plano de equação $z = 1$.

9.1.

a) $D'_f = \{-4\} \cup]-3\ ,\ 6[$

b) $[-5\ ,\ 2]$

c) $]-\infty\ ,\ -4]$

d) Máximos relativos: 3

Maximizantes: todos os pontos pertencentes a $[-1\ ,\ 2]$

9.2. Por observação do gráfico cartesiano, um dos zeros é 4.

Para determinar o outro zero recorre-se à equação reduzida da reta que passa nos pontos $(-5\ ,\ -2)$ e $(-1\ ,\ 3)$.

$$m = \frac{3-(-2)}{-1-(-5)} = \frac{5}{4}$$

$$3 = \frac{5}{4}\times(-1)+b \Leftrightarrow b = 3+\frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$$

A reta de equação $y = \frac{5}{4}x+\frac{17}{4}$ interseta o eixo Ox no ponto de abcissa dada por

$$\frac{5}{4}x+\frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow 5x+17 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{5}.$$

Assim, os zeros da função são $-\frac{17}{5}$ e 4.

9.3. $D_h = \left[-5\times\frac{1}{2}\ ,\ 8\times\frac{1}{2}\right[= \left[-\frac{5}{2}\ ,\ 4\right[$

10.1. $D'_f = \left]-\infty\ ,\ 2\right]$

10.2. $f(0) = -\frac{2}{9}(0-3)^2+2 = -\frac{2}{9}\times 9+2 = -2+2 = 0$

$f(6) = -\frac{2}{9}(6-3)^2+2 = -\frac{2}{9}\times 9+2 = -2+2 = 0$

Assim, 0 e 6 são zeros de f .

10.3. Altura do trapézio: 10 ; Base menor do trapézio: $\overline{OC} = 6$; Base maior do trapézio: $\overline{AB}$

Para determinar A e B resolve-se a condição:

$$-\frac{2}{9}(x-3)^2+2 = -10 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-3)^2 = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 = 108 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 54 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{54} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \pm 3\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 3+3\sqrt{6} \vee x = 3-3\sqrt{6}$$

Assim, $A\left(3-3\sqrt{6}\ ,\ -10\right)$ e $B\left(3+3\sqrt{6}\ ,\ -10\right)$.

$$\overline{AB} = \left|3+3\sqrt{6}-\left(3-3\sqrt{6}\right)\right| = \left|6\sqrt{6}\right| = 6\sqrt{6}$$

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{6\sqrt{6}+6}{2}\times 10 = 30\sqrt{6}+30$$

10.4. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-3)^2+2 < \frac{10}{9}x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2(x-3)^2+18-10x < 0$$

$$\Leftrightarrow -2\left(x^2-6x+9\right)+18-10x < 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+2x < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x > 0$$

$$x^2-x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Então, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$.

Assim, $x \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[\cup \left]1\ ,\ +\infty\right[$.