Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

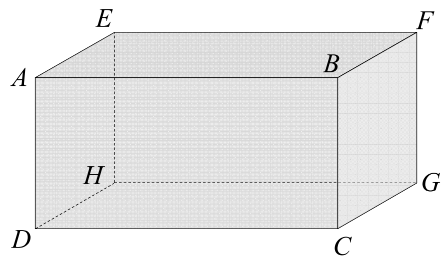
Duração: 90 minutos | **Data:** MAIO 2019

Porto Editora

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere, fixado um referencial o. n. *Oxyz*, o prisma quadrangular regular [*ABCDEFGH*].



Sabe-se que:

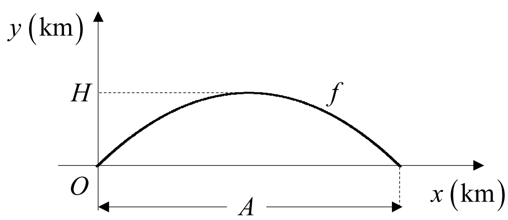
- os pontos *D*, *E* e *G* pertencem aos semieixos positivos;
- a área do quadrado [*ADHE*] é igual a 4;
- o volume do prisma [*ABCDEFGH*] é igual a 20.

Qual das opções seguintes **não pode representar** as coordenadas de um dos vértices do prisma?

(A) $(0,0,2)$ **(B)** $(0,5,0)$

(C) $(2,5,0)$ **(D)** $(2,5,5)$

2. Na figura seguinte, o gráfico de *f* descreve a trajetória de um projétil, lançado de um ponto coincidente com a origem do referencial.

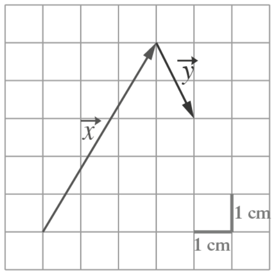


No gráfico, relaciona-se o deslocamento do projétil (*x*) com a respetiva altura $(y = f(x))$, ambos expressos em quilómetros (km).

Sabendo que $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$, a altura máxima, *H*, e o alcance, *A*, do projétil são, respetivamente, iguais a:

(A) 20 e 2 **(B)** 2 e 40 **(C)** 20 e 40 **(D)** 2 e 20

3. Na figura ao lado, estão representados dois vetores ($\vec{x}$ e $\vec{y}$).

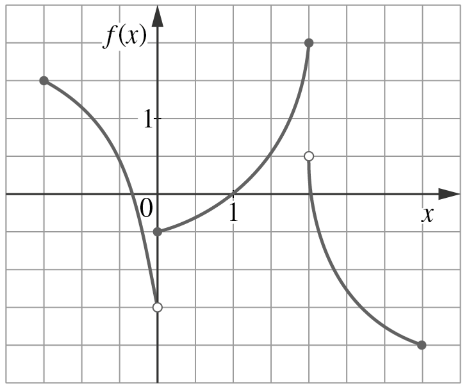


Qual é a norma do vetor $\vec{x}+\vec{y}$?

(A) 3 **(B)** 4

(C) 5 **(D)** 6

4. Na figura está representado, num referencial o. n. xOy, o gráfico cartesiano da função *f*.



Em qual das opções seguintes se apresenta o domínio de *f* ?

(A) $\left[-\frac{3}{2},0\right[\cup\left]0,2\right[\cup\left]2,\frac{7}{2}\right]$

(B) $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

(C) $[-2,2]$

(D) $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$

5. Considere a função *f*, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=x^2+(2-k)x+1$, com $k\in\mathbb{R}$.

A função *f* é par se:

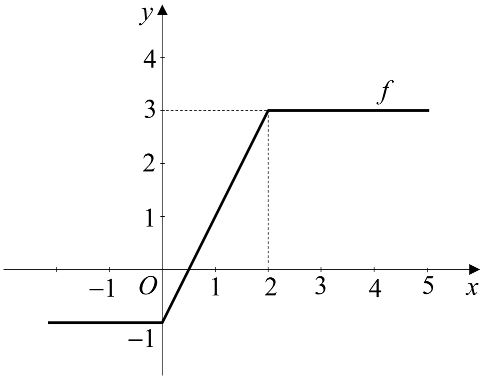
(A) $k=0$ **(B)** $k=2$

(C) $k=-2$ **(D)** $k\in\{0,2\}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere o gráfico cartesiano da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, representado num referencial o. n. xOy.



6.1. Escreva uma expressão algébrica que defina a função *f*.

6.2. Determine:

a) $f\left(\sqrt{5}\right)$

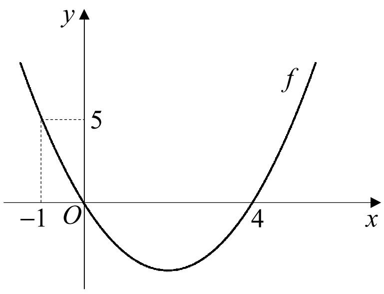
b) o conjunto-solução da equação $f\left(x\right)=2$.

6.3. Indique:

a) os intervalos onde *f* é decrescente em sentido lato;

b) os máximos relativos de *f* e os respetivos maximizantes.

7. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy, parte da parábola que é o gráfico de uma função *f*.



Sabe-se que:

- a parábola contém o ponto de coordenadas $\left(-1,5\right)$;
- os zeros de *f* são 0 e 4.

7.1. Mostre que a função *f* é definida por $f\left(x\right)=\left(x-2\right)^2-4$.

7.2. Determine os valores de *x* que satisfazem a condição $f\left(x\right)\geq 5$.

Apresente o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

7.3. Considere a função *g* definida por $g\left(x\right)=2+f\left(x-1\right)$.

Determine:

a) o contradomínio de *g*;

b) os zeros de *g*.

8. Considere a função g, de domínio $[-5,5]$, definida por $g(x)=-|x-1|+3$.

8.1. Exprima g sem usar o símbolo de módulo.

8.2. Indique:

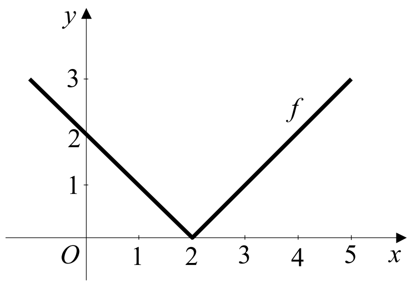
a) o contradomínio de g ;

b) os zeros de g ;

c) os intervalos de monotonia de g .

8.3. Utilizando processos exclusivamente analíticos, resolva a inequação $g(x)<0$.

8.4. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=a|x-b|+c$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$, cujo gráfico cartesiano está parcialmente representado no referencial xOy da figura que se segue.



Resolva a equação $f(x)=g(x)$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

6.1.	6.2.a)	6.2.b)	6.3.a)	6.3.b)	7.1.	7.2.	7.3.a)	7.3.b)
12	8	8	8	12	14	14	10	12

8.1.	8.2.a)	8.2.b)	8.2.c)	8.3.	8.4.	Total
12	8	10	8	12	12	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Por exemplo:

$A(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$; $B(2\ ,\ 5\ ,\ 2)$; $C(2\ ,\ 5\ ,\ 0)$; $D(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$E(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$; $F(0\ ,\ 5\ ,\ 2)$; $G(0\ ,\ 5\ ,\ 0)$; $H(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Resposta: **(D)**

2. Zeros da função f : 0 e 40

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x=0 \Leftrightarrow -x^2+40x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-x+40)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=40$$

Vértice da parábola:

$V(20\ ,\ f(20))$, ou seja $V(20\ ,\ 2)$

Assim, $H=2$ e $A=40$.

Resposta: **(B)**

3. Seja a a medida da norma do vetor $\vec{x}+\vec{y}$.

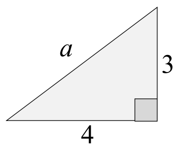
Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2=3^2+4^2$$

$$\Leftrightarrow a^2=25$$

$$\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow a=\pm 5$$



Como $a>0$, então $a=5$.

Resposta: **(C)**

4. Por observação do gráfico cartesiano.

Resposta: **(D)**

5. A função f é par se $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ e $f(-x)=f(x)$.

$$f(-x)=(-x)^2+(2-k)(-x)+1$$

$$=x^2+(k-2)x+1$$

Assim, $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow k-2=2-k \Leftrightarrow 2k=4 \Leftrightarrow k=2$

Resposta: **(B)**

Grupo II

6.1. Para $x \in]-\infty\ ,\ 0]$: $y=-1$

Para $x \in]2\ ,\ +\infty[$: $y=3$

Para $x \in]0\ ,\ 2]$: $y=2x-1$

$$m=\frac{3-(-1)}{2-0}=\frac{4}{2}=2$$

$$b=-1$$

Assim, $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x-1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

6.2. **a)** $\sqrt{5} \in]2\ ,\ +\infty[$, logo $f\left(\sqrt{5}\right) = 3$

$\left(\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3\right)$

b) $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$; C.S. $= \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

6.3. **a)** Em $]-\infty\ ,\ 0]$ e em $[2\ ,\ +\infty[$.

b) Máximos relativos de f : -1 e 3

Maximizantes: Todos os números reais dos intervalos $]-\infty\ ,\ 0[$ e $[2\ ,\ +\infty[$

7.1. Sabe-se que 0 e 4 são zeros de f .

Assim, a função f pode ser escrita como $f(x) = a(x-0)(x-4)$.

Como $f(-1) = 5$ tem-se que:

$f(-1) = 5 \Leftrightarrow a(-1-0)(-1-4) = 5$

$\Leftrightarrow a \times (-1) \times (-5) = 5$

$\Leftrightarrow 5a = 5$

$\Leftrightarrow a = 1$

Então, $f(x) = 1(x-0)(x-4)$ ou seja,

$f(x) = x(x-4) =$

$= x^2 - 4x$

$= (x-2)^2 - 4$

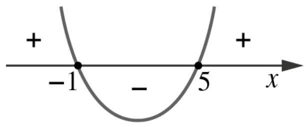
7.2. $f(x) \geq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 \geq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 9 \geq 0$

Determinam-se os zeros do polinómio e faz-se um esboço da parábola:

$(x-2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x - 2 = -3 \vee x - 2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$



Assim, $f(x) \geq 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ -1] \cup [5\ ,\ +\infty[$.

7.3.

a) Como $D'_f = [-4\ ,\ +\infty[$, então $f(x) \geq -4 \Leftrightarrow f(x-1) \geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + f(x-1) \geq -4 + 2$

$\Leftrightarrow g(x) \geq -2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Assim, $D'_g = [-2\ ,\ +\infty[$.

b) Zeros de g : $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + f(x-1) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -2 \Leftrightarrow (x-1-2)^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{2} \vee x - 3 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2} \vee x = 3 - \sqrt{2}$

Zeros de g : $3 + \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2}$

8.1. $D_g = [-5\ ,\ 5]$.

$$g(x) = \begin{cases} -(x-1)+3 & \text{se } x - 1 \geq 0 \wedge x \in D \\ (x-1)+3 & \text{se } x - 1 < 0 \wedge x \in D \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{se } x \geq 1 \wedge x \in D \\ x+2 & \text{se } x < 1 \wedge x \in D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \in [-5\ ,\ 1[\\ -x+4 & \text{se } x \in [1\ ,\ 5] \end{cases}$$

8.2.

a) $g(1)=-|1-1|+3=3$, $g(5)=-|5-1|+3=-1$ e $g(-5)=-|-5-1|+3=-3$

$D'_g=[-3\ ,\ 3]$

b) $g(x)=0 \Leftrightarrow -|x-1|+3=0 \Leftrightarrow -|x-1|=-3$

$\Leftrightarrow |x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=3 \vee x-1=-3$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=-2$

Zeros de g: -2 e 4

c) g é estritamente crescente em $[-5,1]$ e estritamente decrescente em $[1,5]$.

8.3. $g(x)<0 \Leftrightarrow -|x-1|+3<0 \wedge x\in[-5,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|x-1|<-3 \wedge x\in[-5,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1|>3 \wedge x\in[-5,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1<-3 \vee x-1>3) \wedge x\in[-5,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x<-2 \vee x>4) \wedge x\in[-5,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-5,-2[\,\cup\,]4,5]$

$g(x)<0 \Leftrightarrow x\in[-5,-2[\,\cup\,]4,5]$

8.4. Por observação do gráfico cartesiano de f, sabe-se que $b=2$ e $c=0$.

$f(0)=2 \Leftrightarrow a|0-2|=2 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1$

Assim $f(x)=|x-2| \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{se } x\geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x<2 \end{cases}$.

Seja h a função definida em $D_g \cap D_f=[-5\ ,\ 5]$ por:

$h(x)=f(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow h(x)=|x-2|-(-|x-1|+3)$

Pode recorrer-se a uma tabela para auxiliar na determinação da expressão algébrica da função h.

x	-5		1		2		5
$\|x-2\|$	7	$-x+2$	1	$-x+2$	0	$x-2$	3
$-\|x-1\|+3$	-3	$x+2$	3	$-x+4$	2	$-x+4$	-1
$h(x)=\|x-2\|-(-\|x-1\|+3)$	10	$-2x$	-2	-2	-2	$2x-6$	4

Então, $h(x)=\begin{cases} -2x & \text{se } x\in[-5\ ,\ 1] \\ -2 & \text{se } x\in\,]1\ ,\ 2] \\ 2x-6 & \text{se } x\in\,]2\ ,\ 5] \end{cases}$.

Para $x\in[-5\ ,\ 1]$ os zeros de h são dados por $-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ e para $x\in\,]2\ ,\ 5]$ os zeros de h são dados por $2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$.

Assim, $h(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$ e, consequentemente, $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$.

C.S. $=\{0\ ,\ 3\}$

Nota: Esta questão foi resolvida recorrendo a um processo analítico. No entanto, também pode ser resolvida por outros processos (por exemplo, pela determinação da interseção dos gráficos das duas funções).