# MATEMÁTICA A
## 10.º ano

Alexandra Conceição | Matilde Almeida | Diana Barroca
Filipe Galego | João Carlos Terroso | Sandra Teixeira

Ano letivo 2020/2021

Duração do teste: 90 minutos — Junho 2021

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

### Formulário

#### Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ — amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ — raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ — amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ — raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi\, r\, g$ ($r$ — raio da base; $g$ — geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\,\pi\, r^2$ ($r$ — raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ ($r$ — raio)

**1.** Considera a expressão numérica $A = a^{-2} \times \sqrt[4]{a^2}$ , com $a > 0$.

Qual das opções seguintes corresponde a uma expressão equivalente a $A$?

**(A)** $a^{-\frac{3}{2}}$ **(B)** $a$ **(C)** $a^{-\frac{5}{2}}$ **(D)** $a^2$

**2.** Num referencial o.n. $xOy$, considera a circunferência $C_1$ e a reta $r$ definidas, respetivamente, por

$$C_1: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad \text{e} \quad r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

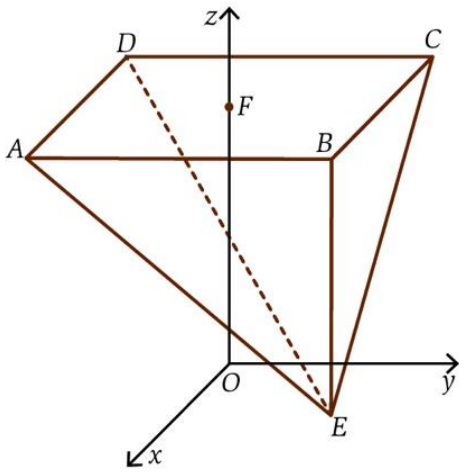
**2.1.** Quais são as coordenadas dos pontos de interseção da reta $r$ com os eixos coordenados? Mostra como chegaste à tua resposta.

**2.2.** Qual dos pontos seguintes pertence, simultaneamente, à reta $r$ e à circunferência $C_1$?

**(A)** $A\,(-1,-3)$ **(B)** $B\,\left(2,-2\sqrt{3}\right)$ **(C)** $C(1,0)$ **(D)** $D\,\left(2,-2+\sqrt{3}\right)$

**3.** No referencial o. n. $Oxyz$, está representada uma pirâmide $[ABCDE]$ cuja base é um quadrado. Sabe-se que:

- o plano que contém $[ABCD]$ é paralelo ao plano $xOy$;
- as arestas da base são paralelas aos eixos coordenados $Ox$ e $Oy$;
- o ponto $F$, centro da base, pertence ao eixo $Oz$;
- o ponto $A$ tem coordenadas $(3,-3,5)$;
- $[BE]$ é a altura da pirâmide;
- o volume da pirâmide é igual a 60.




**3.1.** Mostra que as coordenadas do ponto $E$ são $(3,3,0)$.

**3.2.** Mostra que o plano mediador de $[AE]$ pode ser definido pela equação $12y - 10z + 25 = 0$.

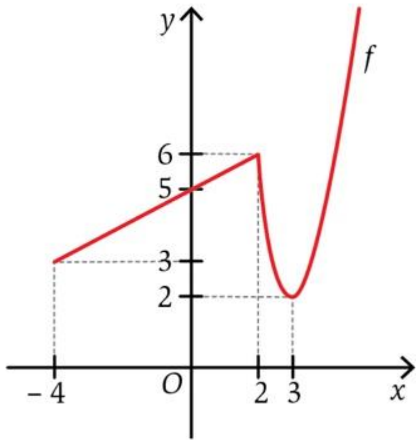
**3.3.** Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta $AC$ com o plano mediador de $[AE]$.

**4.** Considera uma função, $f$, cujo domínio é o conjunto $[-2,3]$ e o contradomínio é o conjunto $]-\infty,4]$.

Em qual das opções seguintes estão representados o domínio e o contradomínio da função $g$ definida por $g(x) = 2f(x) - 1$?

**(A)** $D_g = [-6,4]$ e $D'_g = ]-\infty,8]$
**(B)** $D_g = \left[-1,\frac{3}{2}\right]$ e $D'_g = ]-\infty,2]$
**(C)** $D_g = [-2,3]$ e $D'_g = ]-\infty,7]$
**(D)** $D_g = [-2,3]$ e $D'_g = ]-\infty,6]$

**5.** No referencial da figura, está representado parte do gráfico da função $f$ de domínio $[-4,+\infty[$. Este gráfico é composto por um segmento de reta e por parte de uma parábola cujas coordenadas do vértice são $(3,2)$.




**5.1.** Considera as afirmações seguintes.

I. $f$ é estritamente crescente em $[-4,2]$.
II. O contradomínio de $f$ é $]-\infty,5]$.
III. $f_{|[2,+\infty[}$ é injetiva.

O que podemos concluir acerca das afirmações anteriores?

**(A)** Apenas II é verdadeira.
**(B)** Apenas II é falsa.
**(C)** Apenas III é falsa.
**(D)** Apenas I é verdadeira.
**(E)**

**5.2.** Mostra que a função $f$ é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 5 & \text{se } -4 \leq x \leq 2 \\ 4x^2 - 24x + 38 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

**5.3.** Determina os valores de $k$ para os quais a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções.

**6.** Considera os polinómios $A(x) = 2x^3 + 2x^2 - 16x - 24$ e $B(x) = 2x - 4$.

**6.1.** Qual é o quociente, $Q(x)$, e o resto, $R$, da divisão de $A(x)$ por $B(x)$?

**(A)** $Q(x) = 2x^2 + 6x - 4$ e $R = -32$
**(B)** $Q(x) = 2x^2 + 6x - 4$ e $R = -16$
**(C)** $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R = -32$
**(D)** $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R = -16$

**6.2.** Mostra, recorrendo ao teorema do resto, que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x + 2$.

**7.** Numa experiência de segurança rodoviária, uma bola foi colocada num trilho simulador de autoestrada com 5 quilómetros de comprimento na horizontal. A sua altura, $h$, em metros, é dada em função da sua distância, $x$, em quilómetros, medida na horizontal, desde o sítio em que foi lançada, por

$$h(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 34, \;\; x \in [0;5]$$

**7.1.** Determina a diferença entre as alturas da bola no final e no início da experiência.

**7.2.** Resolve, recorrendo a métodos analíticos, a inequação $h(x) < 34$.
Podes utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.
Apresenta os resultados arredondados às décimas e interpreta-os no contexto da situação descrita.
Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

**7.3.** Recorrendo à calculadora gráfica, determina a distância, percorrida na horizontal desde o ponto onde foi lançada, a que se encontrava a bola quando esta atingiu a altura mínima do trilho em relação ao chão.
Na tua resposta:
– reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
– apresenta o valor pedido, em quilómetros, arredondado às décimas.

**8.** Resolve, em $IR$, a inequação $3|x-2|-1 \leq 5$
Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

**FIM**

**COTAÇÕES**

| Questão | 1. | 2.1 | 2.2 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 4. | 5.1. | 5.2. | 5.3. | 6.1 | 6.2 | 7.1 | 7.2 | 7.3 | 8 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação** | 8 | 10 | 8 | 15 | 15 | 15 | 8 | 8 | 20 | 10 | 8 | 10 | 15 | 20 | 20 | 10 | 200 |

## Proposta de resolução

**1.** $A = a^{-2} \times \sqrt[4]{a^2} = a^{-2} \times a^{\frac{2}{4}} = a^{-2+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$

**Opção (A)**

**2.1.** Sejam $A$ e $B$ os pontos de interseção de $r$ com o eixo $Ox$ e com o eixo $Oy$, respetivamente. Logo,

$A(x_A; 0)$ e $B(0; y_B)$.

Vamos calcular $x_A$.

Seja, $y = 0$.

Assim, $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_A - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x_A = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}(6-\sqrt{3})}{\sqrt{3}^2} \Leftrightarrow x_A = \frac{-3+6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_A = -1 + 2\sqrt{3}$$

Logo, $A\left(-1+2\sqrt{3}, 0\right)$.

Como $-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ é a ordenada na origem, temos $y_B = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $B\left(0; -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Resposta:** As coordenadas do ponto de interseção da reta $r$ com o eixo $Ox$ são $\left(-1+2\sqrt{3}; 0\right)$ e as coordendas do ponto de interseção da reta $r$ com o eixo $Oy$ são $\left(0; -2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**2.2.**

**(A)** Vamos verificar se $A\ (-1, -3)$ é ponto de $C_1$ e de $r$.

$(-1-1)^2 + (-3+2)^2 = 4 \Leftrightarrow (-2)^2 + (-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 5 = 4$, o que é falso.

$A \notin C_1$.

Logo, o ponto $A$ não pertence simultaneamente à reta $r$ e à circunferência $C_1$.

**(B)** Vamos verificar se $B\ \left(2, -2\sqrt{3}\right)$ é ponto de $C_1$ e de $r$.

$(2-1)^2 + \left(-2\sqrt{3}+2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 1^2 + 12 - 8\sqrt{3} + 4 = 4 \Leftrightarrow 17 - 8\sqrt{3} = 4$, o que é falso.

$B \notin C_1$.

Logo, o ponto $B$ não pertence simultaneamente à reta $r$ e à circunferência $C_1$.

**(C)** Vamos verificar se $C\ (1, 0)$ é ponto de $C_1$ e de $r$.

$(1-1)^2 + (0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow 0 + 2^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$, o que é verdadeiro.

$C \in C_1$.

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2$, o que é falso.

$C \notin r$.

Logo, o ponto $C$ não pertence simultaneamente à reta $r$ e à circunferência $C_1$.

**(D)** Vamos verificar se $D\left(2,-2+\sqrt{3}\right)$ é ponto de $C_1$ e de $r$.

$(2-1)^2+\left(-2+\sqrt{3}+2\right)^2=4 \Leftrightarrow 1+\sqrt{3}^2=4 \Leftrightarrow 1+3=4 \Leftrightarrow 4=4$, o que é verdadeiro

$D \in C_1$.

$-2+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2-2+\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}-2 \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}=\sqrt{3}-2$, o que é verdadeiro

$D \in r$.

Logo, o ponto $D$ pertence simultaneamente à reta $r$ e à circunferência $C_1$.

**Opção (D).**

**3.1.** $V_{[ABCDE]}=60 \Leftrightarrow \frac{1}{3}A_{[ABCD]}\times \overline{\mathrm{BE}}=60$

$A(3,-3,5)$

Os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ pertencem ao plano de equação $z=5$ e $F$ é um ponto de $Oz$ e centro do quadrado $[ABCD]$. Logo, $B(3,3,5)$. Donde $\overline{AB}=6$.

$A_{[ABCD]}=6^2=36$

Vamos determinar a altura da pirâmide, $\overline{BE}$.

$\frac{1}{3}A_{[ABCD]}\times \overline{\mathrm{BE}}=60 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 36\times \overline{\mathrm{BE}}=60 \Leftrightarrow 12\overline{\mathrm{BE}}=60 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{BE}}=5$

Logo, $E(3,3,\ 5-5)$, ou seja, $E(3,3,0)$.

**3.2.** Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador de $[AE]$. Então, $\overline{PA}=\overline{PE}$.

$$\overline{PA}=\overline{PE} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+z^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+6y+9+z^2-10z+25=x^2-6x+9+y^2-6y+9+z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y+6y-10z+25=0 \Leftrightarrow 12y-10z+25=0$$

Logo, uma equação do plano mediador de [AE] é $12y-10z+25=0$.

**3.3.** Comecemos por determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ para escrever a equação de $AC$.

$A\ (3,-3,5)$ e $C\ (-3,3,5)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-3,3,5)-(3,-3,5)=(-6,6,0)$

$(x,y,z)=(3,-3,5)+k(-6,6,0), k\in\mathbb{R}$ é uma equação da reta $AC$.

Donde, $(x,y,z)=(3-6k,-3+6k,5), k\in\mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas de qualquer ponto de $AC$ na equação do plano mediador de $[AE]$ obtém-se, $12(-3+6k)-10\times 5+25=0$.

Donde,

$$12(-3+6k)-10\times 5+25=0 \Leftrightarrow -36+72k-50+25=0 \Leftrightarrow 72k=61 \Leftrightarrow k=\frac{61}{72}$$

Assim, $(x,y,z)=\left(3-6\times\frac{61}{72},-3+6\times\frac{61}{72},5\right) \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(-\frac{25}{12},\frac{25}{12},5\right)$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta $AC$ com o plano mediador de $[AE]$ são $\left(-\frac{25}{12},\frac{25}{12},5\right)$.

**4.** O gráfico da função $g$ obtém-se do gráfico da função $f$ por uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma translação de vetor $(0,-1)$.

$f(x)<4 \Leftrightarrow 2f(x)<2\times 4 \Leftrightarrow 2f(x)-1<2\times 4-1 \Leftrightarrow g(x)<7$

Assim, $Dg=Df=[-2,3]$ e $D'g=]-\infty,7]$

**Opção (C)**

**5.1. Opção (D)**

**5.2.** Para $x\in[-4,2]$, a função é representada por parte de uma reta com ordenada na origem igual a $5$ e que passa no ponto $(-4,3)$.

Como os pontos de coordenadas $(-4,3)$ e $(0,5)$ pertencem à reta, o seu declive é

$$m=\frac{5-3}{0-(-4)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Logo, $y=\frac{1}{2}x+5$ é uma equação da reta.

Para $x\in]2,+\infty[$, a função é representada por parte de uma parábola de vértice $(3,2)$.

Assim, $y=a(x-3)^2+2$.

O ponto de abcissa 2 é comum aos dois ramos da função. Determinemos a ordenada do ponto da reta cuja abcissa é $2$: $y=\frac{1}{2}\times 2+5=1+5=6$

Logo, o ponto de coordenadas $(2,6)$ também pertence à parte da parábola representada graficamente.

Assim, $6=a(2-3)^2+2 \Leftrightarrow 6=a\times 1+2 \Leftrightarrow a=6-2 \Leftrightarrow a=4$.

Logo, $y=4(x-3)^2+2 \Leftrightarrow y=4(x^2-6x+9)+2 \Leftrightarrow y=4x^2-24x+38$.

Concluímos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 5 & se\ -4 \leq x \leq 2 \\ 4x^2 - 24x + 38 & se\ \ x > 2 \end{cases}$.

**5.3.** $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções, se $k \in \,]2,3[\, \cup \{6\}$.

**6.1.** $A(x) = (2x - 4)Q(x) + R \Leftrightarrow A(x) = (x - 2)(2Q(x)) + R$

Vamos determinar $2Q(x)$, aplicando a regra de Ruffini.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | -16 | -24 |
| 2 | | 4 | 12 | -8 |
| | 2 | 6 | -4 | -32 |

$2Q(x) = 2x^2 + 6x - 4 \Leftrightarrow Q(x) = x^2 + 3x - 2$

$R = -32$

**Opção (C)**

**6.2.** Pelo teorema do resto, se $A(x)$ é divisível por $x + 2$, então $A(-2) = 0$.

Vamos calcular $A(-2)$.

$A(-2) = 2 \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 16 \times (-2) - 24 = -16 + 8 + 32 - 24 = 0$

Logo, $A(x)$ é divisível por $x + 2$.

**7.1.** A bola inicia o seu percurso ao quilómetro $0$ e termina-o ao quilómetro $5$.

Vamos calcular $h(5) - h(0)$:

$h(0) = 0^4 - 5 \times 0^3 + 5 \times 0^2 + 34 = 34$

$h(5) = 5^4 - 5 \times 5^3 + 5 \times 5^2 + 34 = 159$

Logo, $h(5) - h(0) = 159 - 34 = 125$.

**Resposta:** A diferença entre as alturas da bola no final e no início da experiência é $125\ m$.

**7.2.**

$h(x) < 34 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 34 < 34 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 < 0$

Vamos fatorizar o polinómio $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2$.

$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 = x^2(x^2 - 5x - 5) =$

$$= x^2\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Cálculos auxiliares

$x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

Estudo da variação de sinal de $P(x)$:

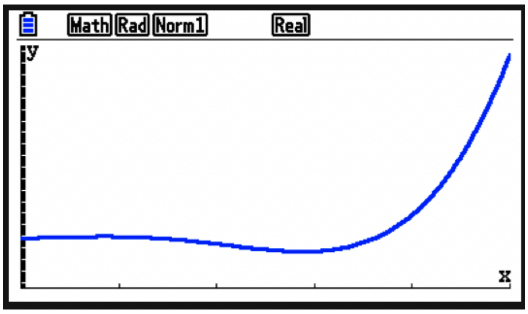
| $x$ | $0$ | | $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | + | + | + | + | + | + |
| $x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ | - | - | 0 | + | + | + | + |
| $x + \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $P(x)$ | 0 | + | 0 | - | 0 | + | + |

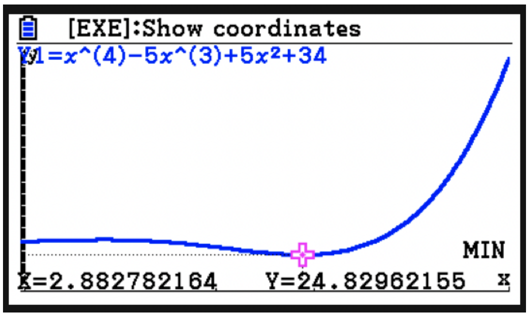
Logo, $h(x) < 34 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$

Podemos verificar que $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}4$ e que $\frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}6$.

Ou seja, a bola está a uma altura inferior a 34 metros na vertical entre, aproximadamente, os 1,4 quilómetros e os 3,6 quilómetros desde o local onde foi lançada.

**7.3.** Usando as potencialidades da calculadora gráfica, obtemos o gráfico de $h$ com uma janela de visualização $[0; 5] \times [0; 165]$ e identificamos o mínimo da função, que corresponde à altura mínima atingida pela bola.



Ou seja, quando a bola atingiu a altura mínima em relação ao chão (24,8 metros), a bola estava a uma distância na horizontal de, aproximadamente, 2,9 quilómetros desde o ponto onde foi lançada.

**8.**

$$
\begin{aligned}
3|x-2|-1 \leq 5 &\Leftrightarrow 3|x-2| \leq 5+1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3|x-2| \leq 6 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{6}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x-2| \leq 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x-2 \leq 2 \wedge x-2 \geq -2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \leq 2+2 \wedge x \geq -2+2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$S = [0, 4]$$