MATEMÁTICA A
10.º ANO

MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

Ano letivo 2023/2024

Questão de março

Nome do aluno: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___

1. Considera a função quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x+1)^2 + 3$.

1.1. Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) 3 é máximo absoluto da função.

(B) A função f não tem zeros.

(C) A função f é crescente em $[1, +\infty[$.

(D) 4 é imagem de zero pela função f.

1.2. Determina analiticamente o conjunto de valores de x que satisfazem a condição $f(x) < 12$.

1.3. Seja r uma reta tangente à parábola que representa graficamente a função f.

Qual das seguintes equações pode definir a reta r?

(A) $y = -1$

(B) $y = -x$

(C) $y = 2x$

(D) $y = 6x$

Resolução:

2. Considera a função g, de domínio $[-1,7]$, definida por $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

Determina analiticamente os extremos absolutos da função g.

Resolução:

Resolução

1.

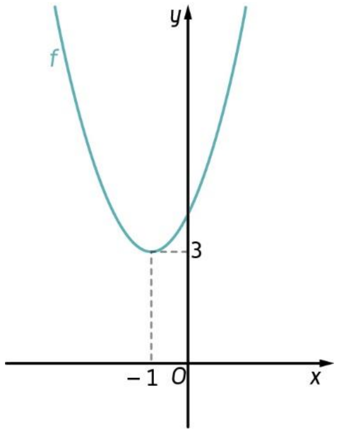
1.1. A parábola que representa graficamente a função f tem concavidade voltada para cima e vértice de coordenadas $(-1{,}3)$. Assim, temos que:

- 3 é mínimo absoluto da função;
- a função não tem zeros;
- a função é crescente em $[-1, +\infty[$, logo, em particular, é crescente em $[1, +\infty[$;

$f(0) = (0+1)^2 + 3 = 1^2 + 3 = 1 + 3 = 4$, logo,

- 4 é imagem de zero pela função f

Resposta: (A)



1.2.

$$f(x) < 12 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 < 12 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 9 < 0$$

$$(x+1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x + 1 = \pm 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = -3 \vee x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = -3 - 1 \vee x = 3 - 1 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

A parábola definida pela equação $y = (x+1)^2 - 9$ tem concavidade voltada para cima e zeros -4 e 2, logo, $(x+1)^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x \in]-4{,}2[$.

Resposta: $]-4{,}2[$

1.3.

- 3 é mínimo absoluto da função f, logo, o seu gráfico não contém pontos com ordenada -1 e, portanto, a reta $y=-1$ não é tangente à parábola que representa graficamente a função f.
- Seja m um número real. Vamos verificar para que valores de m as retas de equação $y=mx$ são tangentes à parábola que representa graficamente a função f, ou seja, vamos determinar para que valores de m a equação $f(x)=mx$ tem uma única solução.

$$f(x)=mx \Leftrightarrow (x+1)^2+3=mx \Leftrightarrow x^2+2x+1+3-mx=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+(2-m)x+4=0$$

A equação $x^2+(2-m)x+4=0$ tem uma única solução quando $\Delta=(2-m)^2-4\times 1\times 4=0$.

Assim,

$$(2-m)^2-4\times 1\times 4=0 \Leftrightarrow (2-m)^2=16 \Leftrightarrow 2-m=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-m=-4 \vee 2-m=4 \Leftrightarrow -m=-2-4 \vee -m=-2+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -m=-6 \vee -m=2 \Leftrightarrow m=6 \vee m=-2$$

Conclui-se, então, que as duas únicas retas com equação do tipo $y=mx$ que são tangentes à parábola que representa graficamente a função f são as definidas pelas equações $y=6x$ e $y=-2x$.

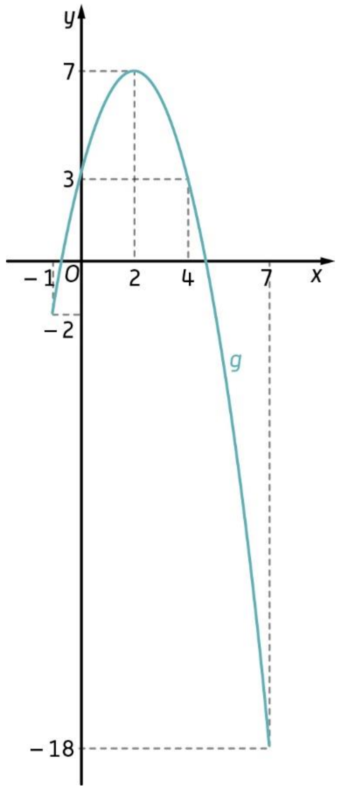
Resposta: (D)

MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

2. $g(0) = -0^2 + 4 \times 0 + 3 = 3$

$g(x) = 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



Seja V o vértice da parábola que representa graficamente a função g.

$x_V = \dfrac{0+4}{2} = 2$

$y_V = g(x_V) = g(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 3 = -4 + 8 + 3 = 7$

Como o coeficiente de x^2 é negativo (-1), a parábola que representa graficamente a função g tem a concavidade voltada para baixo. Como 2 pertence ao domínio da função, conclui-se que a ordenada do vértice, 7, é máximo absoluto da função.

O domínio é um intervalo fechado, logo, o mínimo absoluto da função será a imagem de um dos extremos do intervalo $[-1,7]$, que é o domínio da função.

$g(-1) = -(-1)^2 + 4 \times (-1) + 3 = -1 - 4 + 3 = -2$

$g(7) = -7^2 + 4 \times 7 + 3 = -49 + 28 + 3 = -49 + 31 = -18$

Como $-18 < -2$, -18 é o mínimo absoluto da função g.

Resposta: -18 é o mínimo absoluto e 7 é o máximo absoluto da função g.