MATEMÁTICA A
10.º ANO

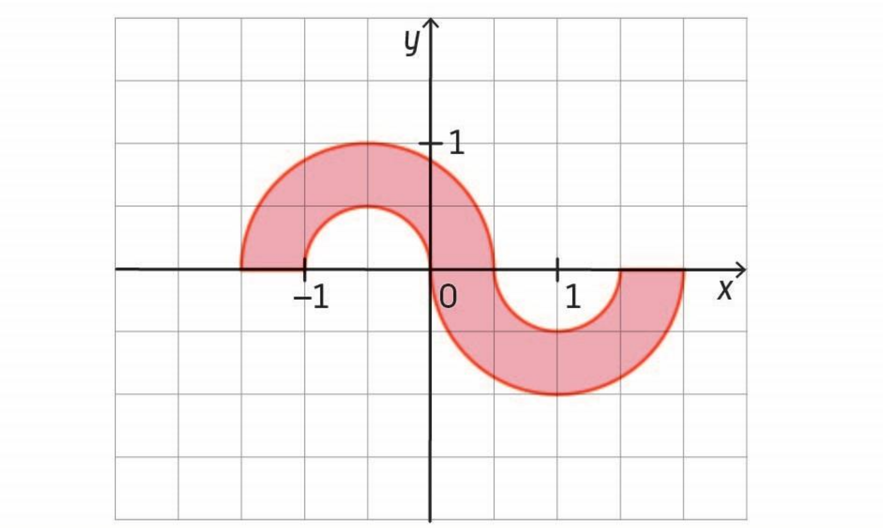
MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

Ano letivo 2023/2024

Questão de Janeiro

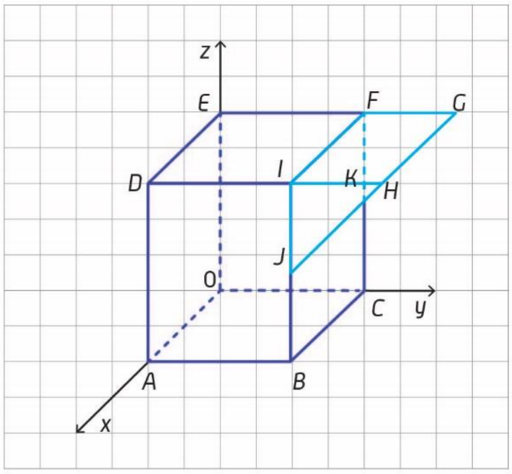
Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

1. **Define, por uma condição, o domínio plano representado abaixo, incluindo a sua fronteira.**



Resolução

2. Na figura, está representado, num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, um sólido composto por dois prismas: um prisma quadrangular regular reto $[OABCDIFE]$ e um prisma triangular reto $[IJHGKF]$.



Sabe-se que:

- o plano EDI é paralelo ao plano coordenado xOy;
- $\overline{DH} = 2\overline{DI}$;
- os pontos A e C pertencem, respetivamente, aos eixos Ox e Oy;
- o vértice O do prisma quadrangular é a origem do referencial;
- o ponto I tem de coordenadas $(2,2,3)$;
- o ponto F pertence à reta EG;
- os pontos J e K são os pontos médios, respetivamente, das arestas $[IB]$ e $[FC]$.

2.1. Indica as coordenadas dos vértices C, J, K e G do sólido representado.

2.2. Escreve a equação reduzida da superfície esférica que circunscreve o prisma $[OABCDIFE]$.

2.3. Escreve a equação do plano que é perpendicular ao eixo Ox e que passa no ponto médio de $[GH]$.

2.4. Um plano definido pela condição $y = k$, com $k \in [0,2]$, divide o sólido da figura em dois sólidos tal que a medida do volume de um deles é a terça parte da medida do volume do outro. Determina o valor de k.
Mostra como chegaste à tua resposta.

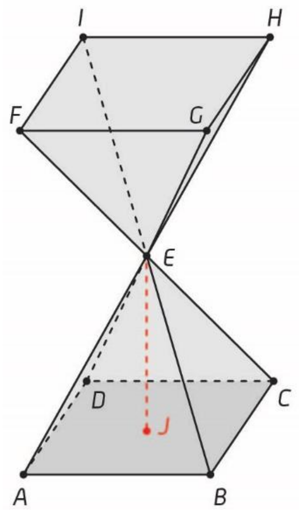
Resolução:

MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

3. **Na figura estão representadas duas pirâmides quadrangulares regulares [*ABCDE*] e [*FGHIE*] iguais.**

Sabe-se que:

- A, E e H são pontos colineares;
- $\overline{AB} = 4\ cm$;
- o ponto J é a projeção ortogonal do ponto E no plano ABC;
- $\overline{JE} = 6\ cm$.



3.1. Determina:

a) $B + \overrightarrow{EI}$

b) $F - \left(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH}\right)$

c) $\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{AE}$

d) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

3.2. Considera o vetor $\vec{u} = 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CF}$.

a) Aplicando as propriedades das operações com vetores, prova que $\vec{u} = \overrightarrow{BI}$.

b) Calcula $\|\vec{u}\|$.

Resolução:

Resolução

1. $\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4}\wedge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq 1\wedge y\geq 0\right]\vee\left[(x-1)^2+y^2\geq\frac{1}{4}\wedge(x-1)^2+y^2\leq 1\wedge y\leq 0\right]$

2.

2.1. Coordenadas dos vértices C, J, K e G do sólido representado:

$$C(0,2,0);\ J\left(2,2,\frac{3}{2}\right);\ K\left(0,2,\frac{3}{2}\right);\ G(0,4,3)$$

2.2. O centro S da superfície esférica tem de coordenadas $S\left(1,1,\frac{3}{2}\right)$.

O raio da superfície esférica é dado por:

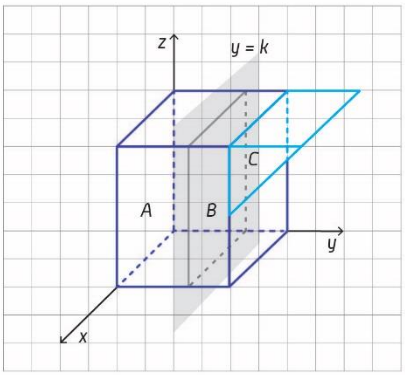
$$d(A,S)=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Equação reduzida da superfície esférica que circunscreve o prisma $[OABCDIFE]$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$

2.3. Equação do plano que é perpendicular ao eixo Ox e que passa no ponto médio de $[GH]$: $x=1$

2.4. Um plano definido pela condição $y=k$, com $k\in[0,2]$, divide o sólido da figura em dois sólidos tal que a medida do volume de um deles é a terça parte da medida do volume do outro.



Então,

$$\frac{1}{3}\times(2\times k\times 3)=2\times(2-k)\times 3+\frac{\frac{3}{2}\times 2}{2}\times 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{6k}{3}=6\times(2-k)+3\Leftrightarrow 6k=3\times(12-6k+3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6k=3\times(15-6k)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6k=45-18k\Leftrightarrow 24k=45\Leftrightarrow k=\frac{45}{24}\Leftrightarrow k=\frac{15}{8}$$

R.: $k=\frac{15}{8}$

3.

3.1

a) $B+\overrightarrow{EI}=B+\overrightarrow{BE}=E$

b) $F-\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{GH}\right)=F-\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}\right)=F-\overrightarrow{CE}=F+\overrightarrow{EC}=F+\overrightarrow{FE}=E$

c) $\overrightarrow{FH}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{FE}$

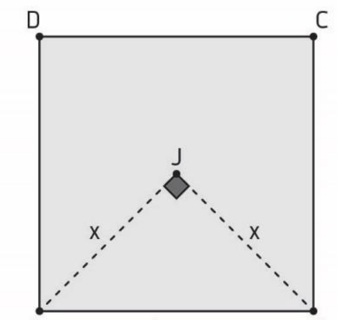
d) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)=2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH}$

3.2

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{BI}$ c.q.m.

b) $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{BI}\|$

Seja $\overline{AJ} = \overline{JB} = x$, então pelo Teorema de Pitágoras



$\overline{AB}^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{JB}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 16 \Leftrightarrow$

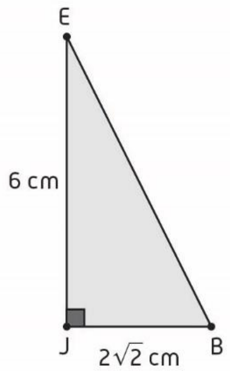
$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{8}$

Ou seja, $x = 2\sqrt{2}\ cm$

Pelo Teorema de Pitágoras



$\overline{EB}^2 = \overline{JB}^2 + \overline{JE}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{EB}^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 6^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{EB}^2 = 8 + 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{EB}^2 = 44 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{EB} = \pm\sqrt{44}$

Como $\overline{EB} > 0$, então $\overline{EB} = \sqrt{44}$

Ou seja, $\overline{EB} = 2\sqrt{11}\ cm$

Assim, $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{BI}\| = 2 \times \|\overrightarrow{EB}\| = 2 \times 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$

R.: $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{11}\ cm$