	Ano letivo 2023/2024
Duração do teste: 90 minutos	Maio 2024

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Para cada resposta, identifica o item.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do teste.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ $(r - \text{raio da base};\ g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ $(r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 (r - \text{raio})$

1. Considera a expressão numérica $A = a^{-2} \times \sqrt[4]{a^2}$, com $a > 0$.

Qual das opções seguintes corresponde a uma expressão equivalente a A?

(A) $a^{-\frac{3}{2}}$ **(B)** a **(C)** $a^{-\frac{5}{2}}$ **(D)** a^2

2. Num referencial o.n. xOy, considera a circunferência C_1 e a reta r definidas, respetivamente, por

$$C_1\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \qquad \text{e} \qquad r\colon y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

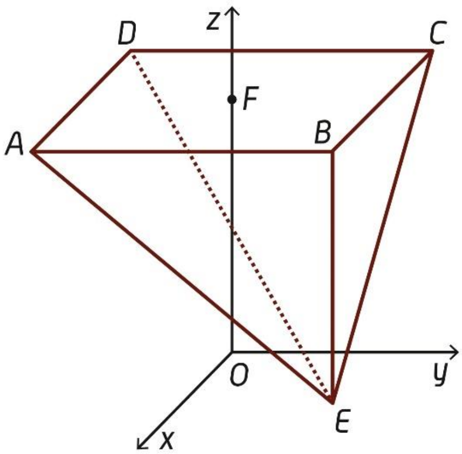
2.1. Quais são as coordenadas dos pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados? Mostra como chegaste à tua resposta.

2.2. Qual dos pontos seguintes pertence, simultaneamente, à reta r e à circunferência C_1?

(A) $A\ (-1,-3)$ **(B)** $B\ \left(2,-2\sqrt{3}\right)$ **(C)** $C(1,0)$ **(D)** $D\ \left(2,-2+\sqrt{3}\right)$

3. No referencial o. n. $Oxyz$, está representada uma pirâmide $[ABCDE]$ cuja base é um quadrado. Sabe-se que:

- o plano que contém $[ABCD]$ é paralelo ao plano xOy;
- as arestas da base são paralelas aos eixos coordenados Ox e Oy;
- o ponto F, centro da base, pertence ao eixo Oz;
- o ponto A tem coordenadas $(3,-3,5)$;
- $[BE]$ é a altura da pirâmide;
- o volume da pirâmide é igual a 60.



3.1. Mostra que as coordenadas do ponto E são $(3,3,0)$.

3.2. Mostra que o plano mediador de $[AE]$ pode ser definido pela equação $12y - 10z + 25 = 0$.

3.3. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta AC com o plano mediador de $[AE]$.

4. Considera uma função, f, cujo domínio é o conjunto $[-2, 3]$ e o contradomínio é o conjunto $]-\infty, 4]$.

Em qual das opções seguintes estão representados o domínio e o contradomínio da função g definida por $g(x) = 2f(x) - 1$?

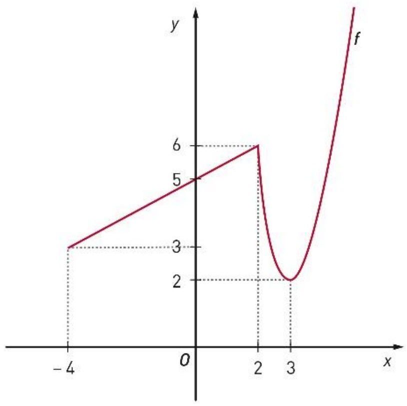
(A) $D_g = [-6, 4]$ e $D'_g =]-\infty, 8]$

(B) $D_g = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ e $D'_g =]-\infty, 2]$

(C) $D_g = [-2, 3]$ e $D'_g =]-\infty, 7]$

(D) $D_g = [-2, 3]$ e $D'_g =]-\infty, 6]$

5. No referencial o. m. xOy da figura, está representada parte do gráfico da função f de domínio $[-4, +\infty[$. Este gráfico é composto por um segmento de reta e por parte de uma parábola cujas coordenadas do vértice são $(3, 2)$.



5.1. Considera as afirmações seguintes.

I. f é estritamente crescente em $[-4, 2]$.

II. O contradomínio de f é $]-\infty, 5]$.

III. $f_{|[2,+\infty[}$ é injetiva.

O que podemos concluir acerca das afirmações anteriores?

(A) Apenas II é verdadeira.

(B) Apenas II é falsa.

(C) Apenas III é falsa.

(D) Apenas I é verdadeira.

5.2. Mostra que a função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 5 & \text{se } -4 \leq x \leq 2 \\ 4x^2 - 24x + 38 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

5.3. Determina os valores de k para os quais a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções.

6. Considera os polinómios $A(x) = 2x^3 + 2x^2 - 16x - 24$ e $B(x) = 2x - 4$.

6.1. Qual é o quociente, $Q(x)$, e o resto, R, da divisão de $A(x)$ por $B(x)$?

(A) $Q(x) = 2x^2 + 6x - 4$ e $R = -32$

(B) $Q(x) = 2x^2 + 6x - 4$ e $R = -16$

(C) $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R = -32$

(D) $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R = -16$

6.2. Mostra, recorrendo ao teorema do resto, que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x + 2$.

7. Numa experiência de segurança rodoviária, uma bola foi colocada num trilho simulador de autoestrada com 5 quilómetros de comprimento na horizontal. A sua altura, h, em metros, é dada em função da sua distância, x, em quilómetros, medida na horizontal, desde o sítio em que foi lançada, por

$$h(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 34,\ \ x \in [0; 5]$$

7.1. Determina a diferença entre as alturas da bola no final e no início da experiência.

7.2. Resolve, recorrendo a métodos analíticos, a inequação $h(x) < 34$.

Podes utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresenta os resultados arredondados às décimas e interpreta-os no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

7.3. Recorrendo à calculadora gráfica, determina a distância, percorrida na horizontal desde o ponto onde foi lançada, a que se encontrava a bola quando esta atingiu a altura mínima do trilho em relação ao chão.

Na tua resposta:

– reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresenta o valor pedido, em quilómetros, arredondado às décimas.

8. Resolve, em IR, a inequação $3|x - 2| - 1 \leq 5$

Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

FIM

COTAÇÕES

Questão	1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.1.	Total
Domínio	CP	CP	RC/RP	CM	CP	CP	RC/RP	CP	
Cotação	10	10	10	15	15	15	10	10	
Questão	5.2.	5.3.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	7.3.	8.	
Domínio	CP	RC/RP	CP	CP	RC/RP	CM	RC/RP	CP	
Cotação	17	10	10	10	15	17	16	10	200

CP – Cálculo e procedimentos
CM – Comunicação matemática
RC/RP – Raciocínio matemático/Resolução de problemas

Proposta de resolução

1. $A = a^{-2} \times \sqrt[4]{a^2} = a^{-2} \times a^{\frac{2}{4}} = a^{-2+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$

Opção (A)

2.

2.1. Sejam A e B os pontos de interseção de r com o eixo Ox e com o eixo Oy, respetivamente. Logo,

$A(x_A; 0)$ e $B(0; y_B)$.

Vamos calcular x_A.

Seja, $y = 0$.

Assim, $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_A - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x_A = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}(6-\sqrt{3})}{\sqrt{3}^2} \Leftrightarrow x_A = \frac{-3+6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_A = -1 + 2\sqrt{3}$$

Logo, $A(-1+2\sqrt{3}, 0)$.

Como $-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ é a ordenada na origem, temos $y_B = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $B\left(0; -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Resposta: As coordenadas do ponto de interseção da reta r com o eixo Ox são $\left(-1+2\sqrt{3}; 0\right)$ e as coordendas do ponto de interseção da reta r com o eixo Oy são $\left(0; -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.2.

(A) Vamos verificar se $A\,(-1, -3)$ é ponto de C_1 e de r.

$(-1-1)^2 + (-3+2)^2 = 4 \Leftrightarrow (-2)^2 + (-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 5 = 4$, o que é falso.

$A \notin C_1$.

Logo, o ponto A não pertence simultaneamente à reta r e à circunferência C_1.

(B) Vamos verificar se $B\left(2, -2\sqrt{3}\right)$ é ponto de C_1 e de r.

$(2-1)^2 + \left(-2\sqrt{3}+2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 1^2 + 12 - 8\sqrt{3} + 4 = 4 \Leftrightarrow 17 - 8\sqrt{3} = 4$, o que é falso.

$B \notin C_1$.

Logo, o ponto B não pertence simultaneamente à reta r e à circunferência C_1.

(C) Vamos verificar se $C\,(1, 0)$ é ponto de C_1 e de r.

$(1-1)^2 + (0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow 0 + 2^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$, o que é verdadeiro.

$C \in C_1$.

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2$, o que é falso.

$C \notin r$.

Logo, o ponto C não pertence simultaneamente à reta r e à circunferência C_1.

(D) Vamos verificar se $D\left(2,-2+\sqrt{3}\right)$ é ponto de C_1 e de r.

$(2-1)^2+\left(-2+\sqrt{3}+2\right)^2=4 \Leftrightarrow 1+\sqrt{3}^2=4 \Leftrightarrow 1+3=4 \Leftrightarrow 4=4$, o que é verdadeiro

$D \in C_1$.

$-2+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2-2+\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}-2 \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}=\sqrt{3}-2$, o que é verdadeiro

$D \in r$.

Logo, o ponto D pertence simultaneamente à reta r e à circunferência C_1.

Opção (D).

3.

3.1. $V_{[ABCDE]}=60 \Leftrightarrow \frac{1}{3}A_{[ABCD]}\times \overline{\text{BE}}=60$

$A(3,-3,5)$

Os pontos A, B, C e D pertencem ao plano de equação $z=5$ e F é um ponto de Oz e centro do quadrado $[ABCD]$. Logo, $B(3,3,5)$. Donde $\overline{AB}=6$.

$A_{[ABCD]}=6^2=36$

Vamos determinar a altura da pirâmide, $\overline{BE}$.

$$\frac{1}{3}A_{[ABCD]}\times \overline{\text{BE}}=60 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 36\times \overline{\text{BE}}=60 \Leftrightarrow 12\overline{\text{BE}}=60 \Leftrightarrow \overline{\text{BE}}=5$$

Logo, $E(3,3,\ 5-5)$, ou seja, $E(3,3,0)$.

3.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador de $[AE]$. Então, $\overline{PA}=\overline{PE}$.

$$\overline{PA}=\overline{PE} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+z^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+6y+9+z^2-10z+25=x^2-6x+9+y^2-6y+9+z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y+6y-10z+25=0 \Leftrightarrow 12y-10z+25=0$$

Logo, uma equação do plano mediador de [AE] é $12y-10z+25=0$.

3.3. Comecemos por determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ para escrever a equação de AC.

$A\ (3,-3,5)$ e $C\ (-3,3,5)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-3,3,5)-(3,-3,5)=(-6,6,0)$

$(x,y,z)=(3,-3,5)+k(-6,6,0), k\in\mathbb{R}$ é uma equação da reta AC.

Donde, $(x,y,z)=(3-6k,-3+6k,5), k\in\mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas de qualquer ponto de AC na equação do plano mediador de $[AE]$ obtém-se, $12(-3+6k)-10\times 5+25=0$.

Donde,

$$12(-3+6k)-10\times 5+25=0 \Leftrightarrow -36+72k-50+25=0 \Leftrightarrow 72k=61 \Leftrightarrow k=\frac{61}{72}$$

Assim, $(x,y,z)=\left(3-6\times\frac{61}{72},-3+6\times\frac{61}{72},5\right) \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(-\frac{25}{12},\frac{25}{12},5\right)$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta AC com o plano mediador de $[AE]$ são $\left(-\frac{25}{12},\frac{25}{12},5\right)$.

4. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma translação de vetor $(0,-1)$.

$f(x)<4 \Leftrightarrow 2f(x)<2\times 4 \Leftrightarrow 2f(x)-1<2\times 4-1 \Leftrightarrow g(x)<7$

Assim, $Dg=Df=[-2,3]$ e $D'g=]-\infty,7]$

Opção (C)

5.

5.1. Opção (D)

5.2. Para $x\in[-4,2]$, a função é representada por parte de uma reta com ordenada na origem igual a 5 e que passa no ponto $(-4,3)$.

Como os pontos de coordenadas $(-4,3)$ e $(0,5)$ pertencem à reta, o seu declive é

$$m=\frac{5-3}{0-(-4)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Logo, $y=\frac{1}{2}x+5$ é uma equação da reta.

Para $x\in]2,+\infty[$, a função é representada por parte de uma parábola de vértice $(3,2)$.

Assim, $y=a(x-3)^2+2$.

O ponto de abcissa 2 é comum aos dois ramos da função. Determinemos a ordenada do ponto da reta cuja abcissa é 2: $y=\frac{1}{2}\times 2+5=1+5=6$

Logo, o ponto de coordenadas $(2,6)$ também pertence à parte da parábola representada graficamente.

Assim, $6=a(2-3)^2+2 \Leftrightarrow 6=a\times 1+2 \Leftrightarrow a=6-2 \Leftrightarrow a=4$.

Logo, $y=4(x-3)^2+2 \Leftrightarrow y=4(x^2-6x+9)+2 \Leftrightarrow y=4x^2-24x+38$.

Concluímos que $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+5 & se\ -4\le x\le 2\\ 4x^2-24x+38 & se\ \ x>2\end{cases}$.

5.3. $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções, se $k \in]2, 3[\cup \{6\}$.

6.

6.1. $A(x) = (2x-4)Q(x) + R \Leftrightarrow A(x) = (x-2)(2Q(x)) + R$

Vamos determinar $2Q(x)$, aplicando a regra de Ruffini.

	2	2	-16	-24
2		4	12	-8
	2	6	-4	-32

$2Q(x) = 2x^2 + 6x - 4 \Leftrightarrow Q(x) = x^2 + 3x - 2$

$R = -32$

Opção (C)

6.2. Pelo teorema do resto, se $A(x)$ é divisível por $x+2$, então $A(-2) = 0$.

Vamos calcular $A(-2)$.

$A(-2) = 2 \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 16 \times (-2) - 24 = -16 + 8 + 32 - 24 = 0$

Logo, $A(x)$ é divisível por $x+2$.

7.

7.1. A bola inicia o seu percurso ao quilómetro 0 e termina-o ao quilómetro 5.

Vamos calcular $h(5) - h(0)$:

$h(0) = 0^4 - 5 \times 0^3 + 5 \times 0^2 + 34 = 34$

$h(5) = 5^4 - 5 \times 5^3 + 5 \times 5^2 + 34 = 159$

Logo, $h(5) - h(0) = 159 - 34 = 125$.

Resposta: A diferença entre as alturas da bola no final e no início da experiência é $125\ m$.

7.2.

$h(x) < 34 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 34 < 34 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 < 0$

Vamos fatorizar o polinómio $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2$.

$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 = x^2(x^2 - 5x - 5) =$

$$= x^2\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Cálculos auxiliares

$x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

Estudo da variação de sinal de $P(x)$:

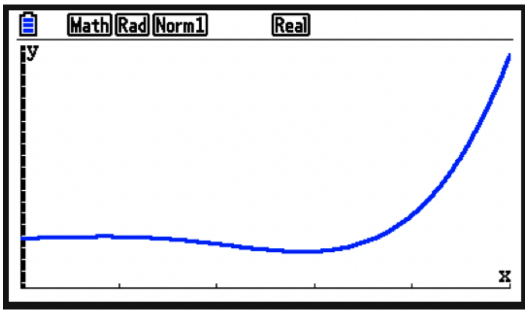
x	0		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		5
x^2	0	+	+	+	+	+	+
$x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}$	-	-	0	+	+	+	+
$x + \frac{5+\sqrt{5}}{2}$	-	-	-	-	0	+	+
$P(x)$	0	+	0	-	0	+	+

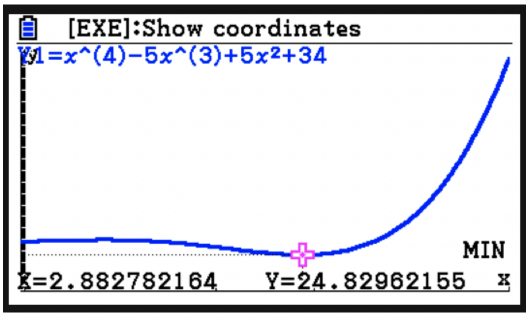
Logo, $h(x) < 34 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$

Podemos verificar que $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}4$ e que $\frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}6$.

Ou seja, a bola está a uma altura inferior a 34 metros na vertical entre, aproximadamente, os 1,4 quilómetros e os 3,6 quilómetros desde o local onde foi lançada.

7.3. Usando as potencialidades da calculadora gráfica, obtemos o gráfico de h com uma janela de visualização $[0; 5] \times [0; 165]$ e identificamos o mínimo da função, que corresponde à altura mínima atingida pela bola.





Ou seja, quando a bola atingiu a altura mínima em relação ao chão (24,8 metros), a bola estava a uma distância na horizontal de, aproximadamente, 2,9 quilómetros desde o ponto onde foi lançada.

8.

$$
\begin{aligned}
3|x-2|-1 \leq 5 &\Leftrightarrow 3|x-2| \leq 5+1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3|x-2| \leq 6 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{6}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x-2| \leq 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x-2 \leq 2 \wedge x-2 \geq -2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \leq 2+2 \wedge x \geq -2+2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$S = [0, 4]$$