Teste N.º 5 – Proposta de resolução

1.

1.1 $D_f = [-6, 5]$; $D'_f = [-5, 4[$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \lor x = 1 \lor x = 4$

Os zeros de f são -4, 1 e 4.

1.2 f é estritamente decrescente em $[-6, -2]$ e em $]2, 5]$ e é estritamente crescente em $[-2, 2]$.

3 é máximo relativo em $x = -6$. f não apresenta máximo absoluto.

Apresenta mínimos relativos em $x = -2$ e em $x = 5$, cujos valores são, respetivamente, -3 e -5.

-5 é mínimo absoluto.

1.3 Opção (D)

$h^{-1} \circ f(2) = h^{-1}\big(f(2)\big) = h^{-1}(1) = 3$

Cálculo auxiliar:

$h(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 5 = 1$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = 6$

$\Leftrightarrow x = 3$

2.

2.1 Opção (B)

Uma vez que o resto da divisão do polinómio que define a função f por $x + 2$ é 8, temos que $f(-2) = 8$.

Assim, $-(-2)^4 - (-2)^3 + 7(-2)^2 + (-2) - k = 8 \Leftrightarrow -16 + 8 + 28 - 2 - k = 8$

$\Leftrightarrow 18 - k = 8$

$\Leftrightarrow k = 10$

2.2 Para $k = 6, f$ é definida por $f(x) = -x^4 - x^3 + 7x^2 + x - 6$.

-1 e 1 são zeros da função f, então o polinómio que define a função f é divisível por $x + 1$ e por $x - 1$.

Desta forma, utilizamos a regra de Ruffinni para fatorizar o polinómio que define a função f.

	-1	-1	7	1	-6
-1		1	0	-7	6
	-1	0	7	-6	0
1		-1	-1	6	
	-1	-1	6	0	

Assim, $f(x) = (x + 1)(x - 1)(-x^2 - x + 6)$.

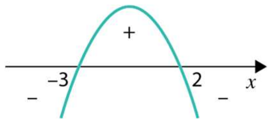
Cálculo auxiliar:

$-x^2 - x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \ \vee x = 2$



	$-\infty$	-3		-1		1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x^2-x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)(x-1)(-x^2-x+6)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

O conjunto dos números reais para os quais a função f é negativa é $]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.

3. Opção (C)

Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A e B.

$x^2 - 5x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee x = 6$

Considerando A o ponto de interseção do gráfico de f com a reta r com menor abcissa, tem-se que:

$y_A = 0 + 2 = 2$ e $y_B = 6 + 2 = 8$.

Desta forma, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(0, 2)$ e $(6, 8)$.

Logo, $\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

4.

4.1 Opção (A)

A função f tem máximo absoluto 7 em $x = 1$.

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo uma simetria em relação ao eixo das abcissas, seguida de uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(4, 0)$ e posterior translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, 6)$.

Pela simetria inicial, a função g passaria a ter mínimo absoluto -7 em $x = 1$. Das duas translações, horizontal e vertical, resulta uma translação associada ao vetor de coordenadas $(4, 6)$, o que significa que as coordenadas do ponto cuja ordenada é mínimo da função são: $(1 + 4, -7 + 6) = (5, -1)$.

4.2

- em $]-\infty,-3]$, f é representada por parte de uma reta de declive positivo.

  -6 é zero da função e o ponto de coordenadas $(-3,3)$ pertence ao gráfico da função.

  Logo,

  $m=\dfrac{0-3}{-6-(-3)}=\dfrac{-3}{-3}=1$

  Como ponto de coordenadas $(-3,3)$ pertence à reta:

  $3=1\times(-3)+b \Leftrightarrow 3=-3+b \Leftrightarrow b=6$

  $\therefore\ y=x+6$

- em $]-3,-1]$, f é representada por parte de uma reta de declive nulo.

  $\therefore\ y=3$

- em $]-1,+\infty[$:

  O vértice da parábola que representa a função neste intervalo tem coordenadas $(1,7)$, pelo que uma expressão que define a função é da forma:

  $y=a(x-1)^2+7$

  Uma vez que a parábola interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 6:

  $6=a(0-1)^2+7 \Leftrightarrow 6=a\times 1+7 \Leftrightarrow a=-1$

  $\therefore\ y=-(x-1)^2+7=-(x^2-2x+1)+7=-x^2+2x+6$

Assim,

$$f(x)=\begin{cases} x+6 & \text{se} & x\le -3 \\ 3 & \text{se} & -3<x\le -1 \\ -x^2+2x+6 & \text{se} & x>-1 \end{cases}$$

5. Opção (D)

$f(x)=-5|x+1|+2=$

$$=\begin{cases} -5(x+1)+2 & \text{se} & x+1\ge 0 \\ -[-5(x+1)]+2 & \text{se} & x+1<0 \end{cases}=\begin{cases} -5x-5+2 & \text{se} & x\ge -1 \\ 5x+5+2 & \text{se} & x<1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -5x-3 & \text{se} & x\ge -1 \\ 5x+7 & \text{se} & x<-1 \end{cases}$$

6.

6.1 $3f(-5)=3(-|-5+2|+4)=3(-|-3|+4)=3(-3+4)=3\times(1)=3$

$f(x)<3f(-5) \Leftrightarrow -|x+2|+4<3$

$\Leftrightarrow -|x+2|<-1$

$\Leftrightarrow |x+2|>1$

$\Leftrightarrow x+2>1 \ \vee\ x+2<-1$

$\Leftrightarrow x>-1 \ \vee\ x<-3$

$\text{C.S.}=]-\infty,-3[\ \cup\ ]-1,+\infty[$

6.2 Comecemos por determinar a abcissa do ponto B:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -|x+2| + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -|x-2| = -4$

$\Leftrightarrow |x-2| = 4$

$\Leftrightarrow x + 2 = 4 \ \vee x + 2 = -4$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee x = -6$

Sabemos que B tem abcissa positiva logo $x_B = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)+4 & \text{se} \quad x+2 \geq 0 \\ -[-(x+2)]+4 & \text{se} \quad x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & \text{se} \quad x \geq -2 \\ x+6 & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$$

A tem coordenadas $(x, 0)$, $x \in]-6, -2[$.

Desta forma, $\overline{AB} = -x + 2$ e $\overline{PC} = -x$.

Como $x \in]-6, -2[$, a ordenada do ponto P é igual a $x + 6$, pelo que $\overline{AP} = x + 6$.

Assim, a área do trapézio $[ABCP]$ é dada, em função de x, por:

$A_{[ABCP]} = \frac{-x+2+(-x)}{2} \times (x+6) =$

$= \frac{-2x+2}{2} \times (x+6) =$

$= (-x+1)(x+6) =$

$= -x^2 - 6x + x + 6 =$

$= -x^2 - 5x + 6$

6.3 $A(x) < 10 \ \wedge \ x \in]-6, -2[$

$-x^2 - 5x + 6 < 10 \Leftrightarrow -x^2 - 5x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow x < -4 \ \vee x > -1$

Como $x \in]-6, -2[$, o conjunto dos valores de x para os quais a área do trapézio $[ABCP]$ é inferior a 10 é $]-6, -4[$.

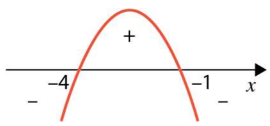
Cálculo auxiliar:

$-x^2 - 5x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -4 \ \vee x = -1$



7. $-x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times (2)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee x = 1$

$\overline{AB} = 2 + 1 = 3$

C é um ponto do primeiro quadrante, pelo que as suas coordenadas são ambas positivas.

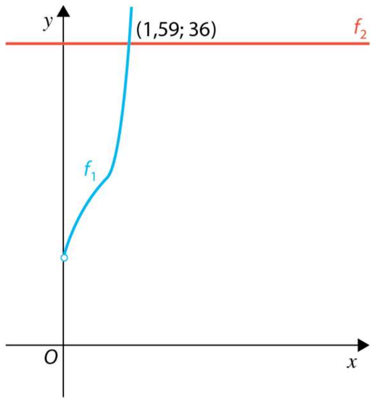
$A_{[ABC]} = \frac{3 \times (a^6 - 3a^3 + 8a + 7)}{2}$ e $A_{[ABC]} = 36$

Uma equação que permite resolver o problema é $\frac{3\times(a^6-3a^3+8a+7)}{2}=36,\ a>0$.

Utilizando x como variável independente:

$\frac{3\times(x^6-3x^3+8x+7)}{2}=36$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$$f_1(x)=\frac{3\times(x^6-3x^3+8x+7)}{2},\qquad x>0$$

$$f_2(x)=36$$

O valor de a com aproximação às décimas é $1{,}6$.