Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$A = -\frac{\sqrt[n]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[3]{xy}} = -\frac{x^{\frac{3}{n}}y^{-\frac{2}{n}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = -x^{\frac{3}{n}-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{n}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{n}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \ \wedge \ -\frac{2}{n}-\frac{1}{3}=-1 \Leftrightarrow \frac{3}{n}=1 \ \wedge \ -\frac{2}{n}=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow n=3$$

2.

2.1. $x^2+y^2+6x+4y=3 \Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+4y+4=3+9+4$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2=16$$

Logo, $C(-3,-2)$.

A reta AB é definida por $(x,y)=(1,2)+k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$.

Averiguemos se C pertence à reta AB:

$(-3,-2)=(1,2)+k(-1,-1) \Leftrightarrow -3=1-k \ \wedge \ -2=2-k$

$$\Leftrightarrow k=4 \ \wedge \ k=4$$

Logo, $C \in AB$.

Como C é o centro da circunferência e A e B pertencem à circunferência, concluímos que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

2.2. Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, então o triângulo $[ABD]$ é retângulo em D.

$$A_{[ABD]} = \frac{\overline{BD} \times \overline{AD}}{2}$$

Determinemos as coordenadas de D:

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+3)^2+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+2)^2=0\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y+2=0\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=1\end{cases}$$

Assim, $D(1,-2)$.

Determinemos as coordenadas de A e B:

$r: (x,y)=(1,2)+k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$.

$m_r = \frac{-1}{-1} = 1$

$y = x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1,2)$ pertence à reta r, então:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$$

$r: y = x + 1$

$$\begin{cases}(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \\ y = x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2 + (x+1+2)^2 = 16 \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2 + (x+3)^2 = 16 \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2(x+3)^2 = 16 \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2 = 8 \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3 = \pm\sqrt{8} \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -3 \pm 2\sqrt{2} \\ y = x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -3 + 2\sqrt{2} \\ y = -2 + 2\sqrt{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x = -3 - 2\sqrt{2} \\ y = -2 - 2\sqrt{2}\end{cases}$$

Logo, $A(-3 - 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$ e $B(-3 + 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$.

Determinemos $\overline{BD}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{(1 + 3 - 2\sqrt{2})^2 + (-2 + 2 - 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{\left(4 - 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 - 16\sqrt{2} + 8 + 8} =$$

$$= \sqrt{32 - 16\sqrt{2}}$$

Determinemos $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{(1 + 3 + 2\sqrt{2})^2 + (-2 + 2 + 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{\left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 16\sqrt{2} + 8 + 8} =$$

$$= \sqrt{32 + 16\sqrt{2}}$$

$$A_{[ABD]} = \frac{\sqrt{32 - 16\sqrt{2}} \times \sqrt{32 + 16\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{32^2 - \left(16\sqrt{2}\right)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{512}}{2} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 8\sqrt{2}$$

2.3. Opção (A)

Sabemos que $C(-3, -2)$ e que $r: (x, y) = (1,2) + k(-1, -1), k \in \mathbb{R}$, logo a sua equação reduzida é da forma $y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas (1, 2) pertence à reta r, então $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = x + 1$.

Assim, a condição que define a região a sombreado pode ser:

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \ \wedge \ y \geq x + 1 \ \wedge \ (x \geq -3 \ \vee \ y \leq -2)$$

3.

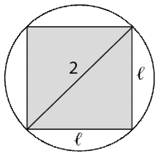
3.1. $\pi \times 1^2 \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \times 1 = \pi - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} =$

$= \pi - \frac{2}{27} =$

$\approx 3{,}06752 \text{ m}^3$

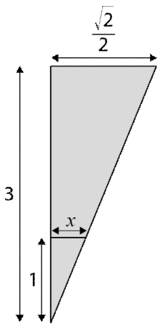
$= 3067{,}52 \ l$

Cálculos auxiliares



$l^2 + l^2 = 4 \Leftrightarrow 2l^2 = 4 \Leftrightarrow l^2 = 2$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{l>0} l = \sqrt{2}$



$\frac{3}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{6}$

O lado do quadrado, que é a base da pirâmide de altura igual a 1 m, é $2 \times \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3.2.

3.2.1. Opção (A)

A altura do líquido no reservatório varia entre 0 m e 3 m (inclusive), logo $D_f = [0, 3]$.

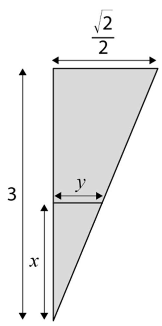
O volume máximo do líquido ocorre quando $x = 3$:

$$\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 3\pi - 2$$

Logo, $D'_f = [0, 3\pi - 2]$.

3.2.2. Seja x a altura de água no reservatório. O volume (em m^3) da água nesse reservatório é igual a $\pi \times 1^2 \times x - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2 \times x = \pi x - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9}x^3 = \pi x - \frac{2}{27}x^3$.

Cálculo auxiliar



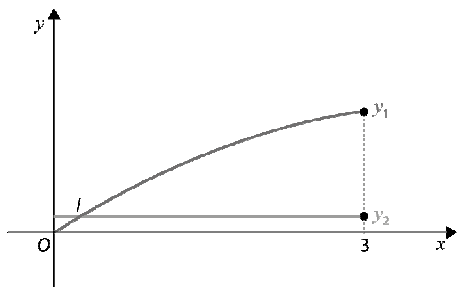
$\frac{3}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{y} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{6}x$

Logo, o lado da pirâmide quadrangular regular de altura x é igual a $2 \times \frac{\sqrt{2}}{6}x = \frac{\sqrt{2}}{3}x$.

3.2.3. $750\ l = 750\ \text{dm}^3 = 0{,}75\ \text{m}^3$

Pretendemos resolver a equação $f(x) = 0{,}75$.

Com recurso às capacidades gráficas da calculadora:



$y_1 = \pi x - \dfrac{2}{27}x^3$

$y_2 = 0{,}75$

$I(a, b)$

$a \approx 0{,}24 \qquad b = 0{,}75$

A água atingirá, aproximadamente, 0,24 metros.

4.

4.1. Opção (C)

Por observação da representação gráfica de g, obtida na calculadora gráfica, concluímos que:

- g não é ímpar, o que exclui a opção (A);
- g não é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, o que exclui a opção (B);
- g não é injetiva, logo a opção (C) é a correta;
- g admite um único zero que pertence a $\mathbb{R}^-$, o que exclui a opção (D).

4.2. Opção (B)

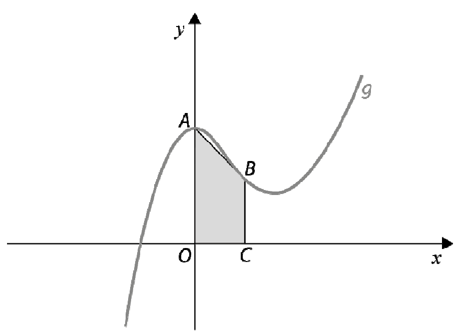
$(h^{-1} \circ g)(2) = h^{-1}\big(g(2)\big) = h^{-1}(3) = -2$

Cálculo auxiliar

$g(2) = 2^3 - \dfrac{5}{2} \times 2^2 + \dfrac{1}{2} \times 2 + 4 = 3$

$h(x) = 3 \Leftrightarrow -2x - 1 = 3 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$

4.3.



Cálculo auxiliar

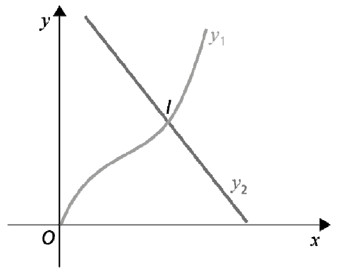
$A(0, 4)$

$B\big(x, g(x)\big), x \in \mathbb{R}^+$

$C(x, 0)$

$$A_{[OABC]} = 6 \Leftrightarrow \frac{4 + g(x)}{2} \times x = 6 \Leftrightarrow \big(4 + g(x)\big)x = 12$$

$$\Leftrightarrow g(x) \times x = 12 - 4x$$



$y_1 = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x$

$y_2 = -4x + 12$

$I(a, b)$

$a \approx 1{,}8 \qquad b \approx 4{,}8$

Logo, a abcissa do ponto B, com aproximação às décimas, é 1,8.

5.

5.1. $\overrightarrow{FE} = (-1{,}2{,}2)$

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC que passa em E pode ser:

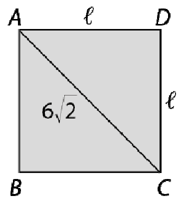
$$(x, y, z) = (-3{,}3{,}1) + k(-1{,}2{,}2), k \in \mathbb{R}$$

5.2. $V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times h$

$F = E + \overrightarrow{EF} = (-3, 3, 1) + (1, -2, -2) = (-2, 1, -1)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-2, 1, -1) - (-2, -2, 2) = (0, 3, -3)$

$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



$l^2 + l^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 72 \Leftrightarrow l^2 = 36$

A área do quadrado $[ABCD]$ é igual a 36 u.a.

$h = \|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$ u.v.

5.3. $E' = F + \overrightarrow{EF} = (-2, 1, -1) + (1, -2, -2) = (-1, -1, -3)$

O plano mediador de $[EE']$ pode ser definido por:

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 6z + 9$

$\Leftrightarrow 6x - 2x - 6y - 2y - 2z - 6z + 9 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 8y - 8z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$