Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item. As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

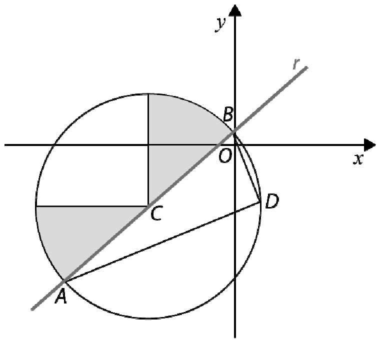
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, dado um número natural $n \geq 2$ e para $x > 0$ e $y > 0$, a expressão $A = -\frac{\sqrt[n]{x^3 y^{-2}}}{\sqrt[3]{xy}}$.

Para que valor de n se tem $A = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{y}$, independentemente dos valores de x e de y?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em C definida pela condição $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 3$, a reta r definida por $(x, y) = (1,2) + k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$ e um triângulo $[ABD]$.



Sabe-se ainda que:

- A e B são os pontos de interseção da circunferência com a reta r;
- o ponto D é o ponto de interseção da circunferência com a reta definida pela condição $x = 1$.

2.1. Prove que $C(-3, -2)$ e que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

2.2. Determine a área do triângulo $[ABD]$. Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$.

2.3. Uma condição que define a região a sombreado poderá ser:

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + 1 \quad \wedge \quad (x \geq -3 \ \vee \ y \leq -2)$

(B) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad (x \geq -3 \ \vee \ y \leq -2)$

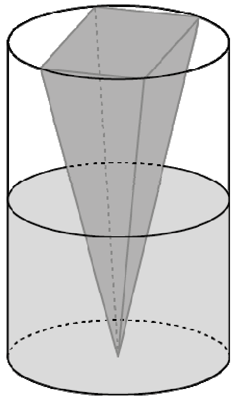
(C) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + 1 \quad \wedge \quad (x \leq -3 \ \vee \ y \geq -2)$

(D) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad (x \leq -3 \ \vee \ y \geq -2)$

3. Na figura ao lado está representado um reservatório de água de forma cilíndrica, feito de material transparente e de espessura desprezável.

A altura do cilindro mede 3 metros e o raio da base do cilindro mede 1 metro.

Dentro do cilindro existe uma pirâmide quandrangular regular maciça, de tal forma que a base da pirâmide está inscrita na face superior do cilindro e o vértice coincide com o centro da face inferior.



3.1. Determine o volume de água existente no reservatório, quando a água atinge nesse reservatório 1 metro de altura. Apresente o resultado em litros, arredondado às centésimas.

3.2. Seja f a função que, à altura x (em metros) de água no reservatório, faz corresponder o volume (em metros cúbicos) de água nesse reservatório.

3.2.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $D_f = [0{,}3]$ e $D'_f = [0\,,3\pi - 2]$

(B) $D_f = [0{,}3]$ e $D'_f = \left[0\,,3\pi - \frac{1}{2}\right]$

(C) $D_f = [0{,}3[$ e $D'_f = [0\,,3\pi - 2]$

(D) $D_f = [0{,}3[$ e $D'_f = \left[0\,,3\pi - \frac{1}{2}\right]$

3.2.2. Mostre que $f(x) = \pi x - \frac{2x^3}{27}$.

3.2.3. Admita que o reservatório está vazio e que nele se introduziram 750 litros de água.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a altura que a água atingirá. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

4. Considere a função polinomial g definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

4.1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\forall x \in \mathbb{R}\,, g(-x) = -g(x)$

(B) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow\ g(x_1) < g(x_2)$

(C) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon g(x_1) = g(x_2)\ \ \wedge\ \ x_1 \neq x_2$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}^+\colon g(x) = 0$

4.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = -2x - 1$.

Qual é o valor de $(h^{-1} \circ g)(2)$?

(A) -7 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 7

4.3. Num referencial o.n. Oxy, considere um ponto B que se desloca ao longo do gráfico da função g e cuja abcissa pertence a $\mathbb{R}^+$.

Sejam:

- A o ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy;
- C a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto B para o qual a área do trapézio $[OABC]$ é igual a 6.

Na sua resposta:

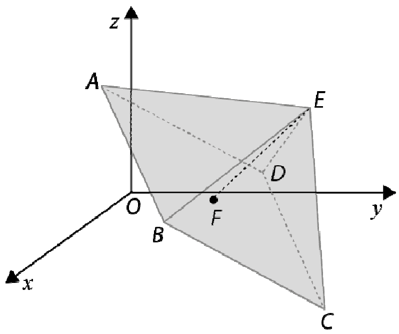
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- apresente os valores pedidos arredondados às décimas.

5. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

Seja F o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(-2,-2,2)$;
- o vértice E tem coordenadas $(-3,3,1)$;
- o vetor $\overrightarrow{FE}$ tem coordenadas $(-1,2,2)$.



5.1. Determine uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC que passa em E.

5.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.

5.3. O plano ABC é o plano mediador do segmento de reta $[EE']$.

Determine as coordenadas de E' e determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide. Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.1.**	**3.2.2.**	**3.2.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	
8	20	20	8	15	8	15	15	8	8	20	15	20	20	**200**