Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1 Opção (B)

$r: (x, y) = (-8, -2) + k(6, 3), k \in \mathbb{R}$

$m_r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

O ponto de coordenadas $(-8, -2)$ pertence à reta r:

$-2 = \frac{1}{2} \times (-8) + b \Leftrightarrow -2 = -4 + b \Leftrightarrow b = 2$

$r: y = \frac{1}{2}x + 2$

A é o ponto de interseção da reta r com a reta s:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y - x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ \frac{1}{2}x + 2 - x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x + 4 - 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ -x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times 8 + 2 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 8 \end{cases}$$

Desta forma, o ponto A tem coordenadas $(8, 6)$ e a medida do raio da circunferência de centro em A e que é tangente ao eixo das abcissas é 6.

Assim, a equação reduzida da circunferência desta circunferência é:

$$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 6^2$$

Desenvolvendo os casos notáveis e simplificando, em seguida, a expressão obtida, tem-se:

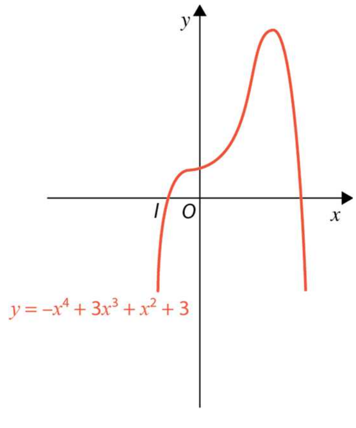
$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 12y + 36 = 36 \Leftrightarrow x^2 - 16x + y^2 - 12y + 64 = 0$

1.2 Substituindo as coordenadas do ponto P, por x e y, respetivamente, na equação da reta s, obtém-se:

$$\begin{aligned} m^2 + 1 - (m^4 - 3m^3) = -2 &\Leftrightarrow m^2 + 1 - m^4 + 3m^3 = -2 \\ &\Leftrightarrow -m^4 + 3m^3 + m^2 + 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow -m^4 + 3m^3 + m^2 + 3 = 0 \quad (m \in \mathbb{R}^-) \end{aligned}$$

Utilizando x como variável independente: $-x^4 + 3x^3 + x^2 + 3 = 0$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



O ponto I é o ponto de abcissa negativa, de interseção do gráfico com o eixo das abcissas, e as suas coordenadas são $(-1, 0)$.

Desta forma, as coordenadas do ponto P são:

$$\left((-1)^4 - 3 \times (-1)^3, (-1)^2 + 1\right) = (4, 2)$$

2. A equação reduzida da circunferência de centro em C e que passa no ponto A é:

$$(x-(-30))^2+(y-(-10))^2=\left(5\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow (x+30)^2+(y+10)^2=250$$

$$m_{OB}=\frac{-10}{-30}=\frac{1}{3}$$

A equação reduzida da reta OB é $y=\frac{1}{3}x$.

A e B são os pontos de interseção da circunferência com a reta AB:

$$\begin{cases}(x+30)^2+(y+10)^2=250\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+30)^2+\left(\frac{x}{3}+10\right)^2=250\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+60x+900+\frac{x^2}{9}+\frac{20x}{3}+100=250\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{10x^2}{9}+\frac{200x}{3}+750=0\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{20x}{3}+75=0\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+60x+675=0\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-60\pm\sqrt{60^2-4\times1\times675}}{2\times1}\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-60\pm\sqrt{900}}{2}\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-60\pm30}{2}\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-60-30}{2} \vee x=\frac{-60+30}{2}\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-45 \vee x=-15\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$$

Desta forma, as coordenadas do ponto A são $\left(-45,\frac{1}{3}\times(-45)\right)=(-45,-15)$ e as coordenadas do ponto B são $\left(-15,\frac{1}{3}\times(-15)\right)=(-15,-5)$.

Uma vez que o ponto D tem a mesma abcissa que o ponto A e a mesma ordenada que o ponto B, as coordenadas do ponto D são $(-45,-5)$.

Uma condição que define a região representada a sombreado, incluindo a fronteira, é:

$$x\geq -45 \wedge y\leq -5 \wedge y\geq \frac{1}{3}x$$

3. Opção (A)

P é um ponto da reta r, pelo que as suas coordenadas são do tipo:

$$(x,y,z)=(4-3k,3+k,2+2k), k\in\mathbb{R}$$

$\overline{AP}=5\sqrt{2}$, logo:

$$\sqrt{(4-3k-3)^2+(3+k-5)^2+(2+2k-1)^2}=5\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-3k)^2+(k-2)^2+(1+2k)^2}=5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-3k)^2+(k-2)^2+(1+2k)^2}=5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (1-3k)^2+(k-2)^2+(1+2k)^2=50$

$\Leftrightarrow 1-6k+9k^2+k^2-4k+4+1+4k+4k^2=50$

$\Leftrightarrow 14k^2-6k-44=0$

$\Leftrightarrow 7k^2-3k-22=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 7\times(-22)}}{2\times 7}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{3\pm\sqrt{625}}{14}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{3\pm 25}{14}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{3-25}{14} \vee k=\dfrac{3+25}{14}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-22}{14} \vee k=\dfrac{28}{14}$

$\Leftrightarrow k=-\dfrac{11}{7} \vee k=2$

Se $k=-\frac{11}{7}$: $\left(4-3\times\left(-\frac{11}{7}\right),3-\frac{11}{7},2+2\times\left(-\frac{11}{7}\right)\right)=\left(\frac{61}{7},\frac{10}{7},-\frac{8}{7}\right)$

Se $k=2$: $(4-3\times 2,3+2,2+2\times 2)=(-2,5,6)$

Uma vez que P tem cota positiva, as suas coordenadas são $(-2,5,6)$.

4.

4.1 $x=9$

4.2 $\overrightarrow{CH}=H-C=(9,3,17)-(5,-3,5)=(4,6,12)$

$\|\overrightarrow{CH}\|=\sqrt{4^2+6^2+12^2}=\sqrt{16+36+134}=\sqrt{196}=14$

O valor da área do quadrado $[ABCD]$ é 25 u.a., logo a medida da aresta da base é 5.

Assim, $A_{[ADEF]}=14\times 5=70$.

Desta forma, o valor exato da área lateral do prisma $[ABCDEFGH]$ é $4\times 70=280$.

5.

5.1 f é estritamente crescente em $[-4,-1]$ e em $[1,3]$.

f é estritamente decrescente em $[-1,0[$, em $]0,1]$ e em $[3,8[$.

Apresenta máximos relativos: 4 e 6, sendo 6 máximo absoluto.

Apresenta mínimos relativos: -5 e -2, sendo -5 mínimo absoluto.

5.2

5.2.1 Opção (C)

$$D_g = \left\{x \in D_f : f(x) \geq 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0\right\} = ([-3, 0[\ \cup [2, 6]) \cap \mathbb{R}\backslash\{-3,3\} =$$
$$=]-3, 0[\ \cup [2, 3[\ \cup]3, 6]$$

Cálculo auxiliar

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < 0 \vee 2 \leq x \leq 6$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

5.2.2 $g(6) - [f^{-1}(6)]^2 + \sqrt{f(-1)} = \frac{\sqrt{f(6)}}{6^2-9} - 3^2 + \sqrt{4} =$

$$= \frac{0}{27} - 9 + 2 =$$
$$= -7$$

5.3 Opção (D)

O gráfico da função h resulta de uma translação horizontal, de vetor de coordenadas $(-2, 0)$, aplicada ao gráfico da função f, pelo que os zeros da função h são $\{-5, 0, 4\}$.

6. Opção (B)

Por um lado, uma vez que f é decrescente, o declive da reta que a representa tem de ser negativo, isto é, $2 - k < 0$.

Por outro lado, a ordenada na origem da reta que a representa é 5, logo $k^2 - 4 = 5$.

Desta forma:

$$2 - k < 0 \wedge k^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow -k < -2 \wedge k^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow k > 2 \wedge (k = -3 \vee k = 3)$$
$$\Leftrightarrow k = 3$$

7. Os pontos do gráfico de f cuja ordenada é igual ao quadrado da sua abcissa têm coordenadas do tipo (x, x^2). Assim:

$$f(x) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 15$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 8}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2-8}{2} \vee x = \frac{2+8}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$$

As coordenadas pretendidas são $(-3, (-3)^2) = (-3, 9)$ e $(5, 5^2) = (5, 25)$.

8. $f(x) = -2x + b$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow -2 \times 2 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$

$f(x) = -2x + 4$

$g(x) = a(x-1)^2 - 6$

$g(0) = -5 \Leftrightarrow a(0-1)^2 - 6 = -5 \Leftrightarrow a = 1$

$g(x) = (x-1)^2 - 6 = x^2 - 2x + 1 - 6 = x^2 - 2x - 5$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 4 = x^2 - 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

As abcissas dos pontos A e B são, respetivamente, -3 e 3.