Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Sabemos que $P(-6,4), Q(a,b)$ e $M(3,-5)$.

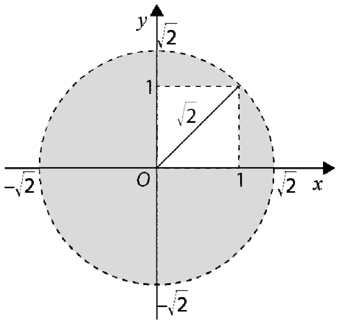
Como M é o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$, então:

$$\frac{-6+a}{2}=3 \quad \wedge \quad \frac{4+b}{2}=-5 \Leftrightarrow -6+a=6 \quad \wedge \quad 4+b=-10$$

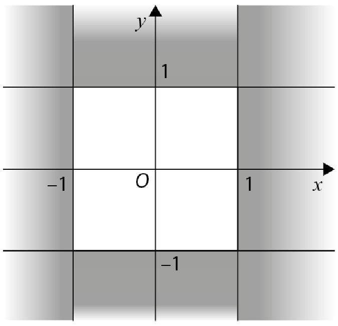
$$\Leftrightarrow a=12 \quad \wedge \quad b=-14$$

2. Opção (D)

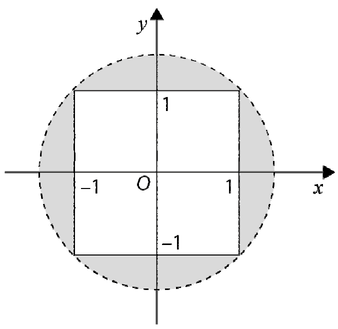
A condição $x^2+y^2<2 \Leftrightarrow x^2+y^2<\left(\sqrt{2}\right)^2$ define:



A condição $|x|\geq 1 \;\vee\; |y|\geq 1 \Leftrightarrow (x\geq 1 \vee x\leq -1) \vee (y\geq 1 \;\vee\; y\leq -1)$ define:

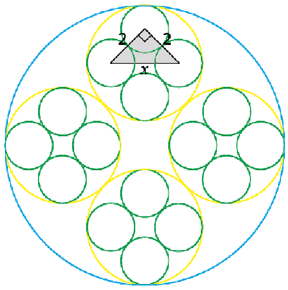


Logo, a condição $x^2+y^2<2 \;\wedge\; (|x|\geq 1 \;\vee\; |y|\geq 1)$ corresponde à interseção dos dois domínios planos acima representados:

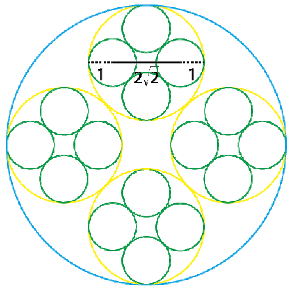


3. $x^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

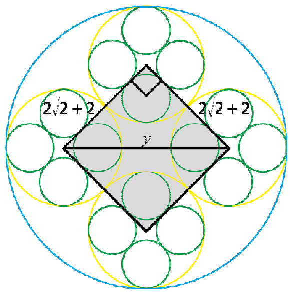
Como $x > 0$, então $x = 2\sqrt{2}$.



O diâmetro da circunferência intermédia é igual a $2\sqrt{2} + 2$, logo o seu raio é igual a $\sqrt{2} + 1$.

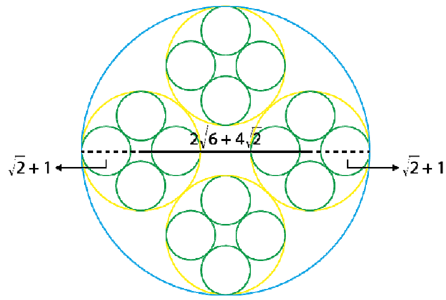


$$\begin{aligned} y^2 = \left(2\sqrt{2}+2\right)^2 + \left(2\sqrt{2}+2\right)^2 &\Leftrightarrow y^2 = 8 + 8\sqrt{2} + 4 + 8 + 8\sqrt{2} + 4 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 24 + 16\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{24 + 16\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4\left(6 + 4\sqrt{2}\right)} \\ &\Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Como $y > 0$, então $y = 2\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$.

O diâmetro da circunferência maior é igual a $2\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$, logo o raio é igual a $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 1$ unidades de comprimento.



4.

4.1. $\overrightarrow{BC} = (12, 6) - (10, -2) = (2, 8)$

$D = A + \overrightarrow{BC} = (-2, 1) + (2, 8) = (0, 9)$

Determinemos as coordenadas do ponto G:

1.º processo

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$

A razão de semelhança entre os retângulos $[ABCD]$ e $[BEFG]$ é igual a $\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{68}{17}} = \sqrt{4} = 2$.

$\overrightarrow{AB} = (10, -2) - (-2, 1) = (12, -3)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{12^2 + (-3)^2} = \sqrt{144 + 9} = \sqrt{153}$

$\|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{2} \times \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\sqrt{153}}{2}$

Como $\overrightarrow{BG}$ é colinear com $\overrightarrow{BA}$, então $\overrightarrow{BG}$ tem coordenadas $(-12k, 3k)$, para algum $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{BG}\| = \frac{\sqrt{153}}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(-12k)^2 + (3k)^2} = \frac{\sqrt{153}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{144k^2 + 9k^2} = \frac{\sqrt{153}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{153}|k| = \frac{\sqrt{153}}{2}\\ &\Leftrightarrow |k| = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \quad \vee \quad k = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$k = \frac{1}{2}$, pois os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BG}$ têm o mesmo sentido.

$\overrightarrow{BG} = \left(-6, \frac{3}{2}\right)$

$G = B + \overrightarrow{BG} = (10, -2) + \left(-6, \frac{3}{2}\right) = \left(4, -\frac{1}{2}\right)$

2.º processo

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$

A razão de semelhança entre os retângulos $[ABCD]$ e $[BEFG]$ é igual a $\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{68}{17}} = \sqrt{4} = 2$.

$G = B + \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} \times \|\overrightarrow{BG}\| = B + \frac{\|\overrightarrow{BG}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|} \times \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA} = (-2, 1) - (10, -2) = (-12, 3)$

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-12)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 9} = \sqrt{153}$

$\|\overrightarrow{BA}\| = 2\|\overrightarrow{BG}\|$

$$\begin{aligned}G = B + \frac{\|\overrightarrow{BG}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|} \times \overrightarrow{BA} = B + \frac{\|\overrightarrow{BG}\|}{2\|\overrightarrow{BG}\|} \times \overrightarrow{BA} = B + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BA} &=\\ = (10, -2) + \frac{1}{2}(-12, 3) &=\\ = \left(4, -\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

4.2. $m_{AB} = \frac{-2-1}{10-(-2)} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x + b$

Como o ponto $A(-2, 1)$ pertence à reta, vem que:

$1 = -\frac{1}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

Logo, a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

Assim, o lado $[AB]$ pode ser definido por $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ \wedge \ -2 \leq x \leq 10$.

4.3. O centro da circunferência circunscrita ao retângulo $[ABCD]$ é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$M = \left(\frac{-2+12}{2}, \frac{1+6}{2}\right) = \left(5, \frac{7}{2}\right)$$

$$r = d(M, A) = \sqrt{(5-(-2))^2 + \left(\frac{7}{2}-1\right)^2} = \sqrt{49 + \frac{25}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{196}{4} + \frac{25}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{221}{4}}$$

Assim, uma condição que define a circunferência pedida é:

$$(x-5)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{221}{4}$$

5. Opção (B)

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 6y + 7 = 0 \\ y = x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + (x-13)^2 + 6(x-13) + 7 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + x^2 - 26x + 169 + 6x - 78 + 7 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 28x + 98 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 49 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -6 \end{cases}$$

A interseção da circunferência com a reta é um ponto.

6.

6.1.

6.1.1. $z = 5$

6.1.2. $x = 0 \quad \wedge \quad y = 3$

6.1.3. $D = C + \overrightarrow{BA} = (0, 3, 5) + (4, -3, 0) = (4, 0, 5)$

$E = D + \overrightarrow{BG} = (4, 0, 5) + (6, 8, 0) = (10, 8, 5)$

O centro da esfera de diâmetro $[BC]$ é o ponto médio do segmento de reta $[EC]$:

$\left(\frac{10+0}{2}, \frac{8+3}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = \left(5, \frac{11}{2}, 5\right)$

O diâmetro é igual a:

$$\begin{aligned} d = d(E, C) &= \sqrt{(10-0)^2 + (8-3)^2 + (5-5)^2} = \\ &= \sqrt{100+25} = \\ &= \sqrt{125} \end{aligned}$$

Logo, o raio é igual a $\frac{\sqrt{125}}{2}$.

Uma condição que define a esfera de diâmetro $[EC]$ pode ser:

$$(x-5)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 + (z-5)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{125}}{2}\right)^2$$

ou seja:

$$(x-5)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 + (z-5)^2 \leq \frac{125}{4}$$

6.1.4. Se o ponto G pertence ao plano mediador do segmento de reta $[DP]$, então:

$$d(G, D) = d(G, P)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(6-4)^2 + (11-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-11)^2 + (z-0)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4+121+25}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-11)^2 + z^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 150 = (x-6)^2 + (y-11)^2 + z^2$$

Trata-se da superfície esférica de centro em G e raio igual a $\sqrt{150}$ $(\overline{DG})$.

6.2. $\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{16+9} = \\ &= \sqrt{25} = \\ &= 5 \end{aligned}$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, AB é perpendicular a $\overline{BC}$ e $[ABCD]$ é um paralelogramo (pois $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo), então $[ABCD]$ é um quadrado.

DBG é o plano mediador do segmento de reta $[AC]$.

Logo, pode ser definido por:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25$$

$$\Leftrightarrow -8x + 6y + 10z - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 3y + 5z - 9 = 0$$

6.3. $X = H - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE}\right) = H - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE}\right) =$

$= H - \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} =$

$= H + \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$

X é o ponto médio do segmento de reta $[HF]$ e $[EG]$.

$V_{[ABCDX]} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h =$

$= \frac{1}{3} \times 5^2 \times 10 =$

$= \frac{250}{3}$

Cálculo auxiliar

$h = d(B, G) = \sqrt{(6-0)^2 + (11-3)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{36 + 24} =$

$= \sqrt{100} =$

$= 10$

7. Opção (A)

$\vec{r}(0, 1, 0)$ é um vetor diretor da reta r.

A reta definida na opção (A) também admite (0,1,0) como vetor diretor.

A reta definida na opção (B) admite $\vec{s}(0, 0, 1)$ como vetor diretor que não é colinear com $\vec{r}$.

A reta definida na opção (C) admite $\vec{t}(1,2, 3)$ como vetor diretor que não é colinear com $\vec{r}$.

A reta definida na opção (D) admite $\vec{v}(1, 0, 1)$ como vetor diretor que não é colinear com $\vec{r}$.

8. Opção (C)

$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow -6 \leq x < 0 \quad \vee \quad 3 < x \leq 6$

Assim, C.S. $= [-6, 0[\cup]3, 6]$.