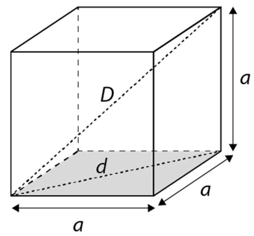
Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

Comecemos por determinar a medida da diagonal espacial de um cubo de aresta a, com $a > 0$:

$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2$

$D^2 = d^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 3a^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D>0} D = \sqrt{3}a$



A diagonal espacial D do cubo é o diâmetro da esfera circunscrita ao cubo, logo o seu raio é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Assim, o volume da esfera é igual a:

$\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$ unidades de volume.

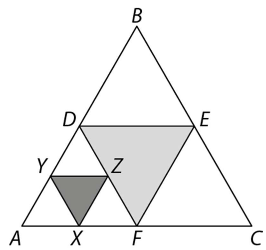
2. Opção (C)

Os triângulos [*ADF*], [*DEF*], [*FEC*] e [*DBE*] são geometricamente iguais e também são equiláteros.

- $X = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{ED} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CF}$, logo X é o ponto médio do segmento de reta [*AF*].
- $Y = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, logo Y é o ponto médio do segmento de reta [*AD*].
- $Z = F + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$, logo Z é o ponto médio do segmento de reta [*FD*].

O triângulo [*XYZ*] é semelhante ao triângulo [*ABC*], com razão de semelhança igual a $\frac{1}{4}$.

Logo, o perímetro do triângulo [*XYZ*] é igual a $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ unidades de comprimento.



3.

3.1. Sabemos que $A(-2, 2)$ e $B(-5, 5)$.

Comecemos por determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA} = (-2, 2) - (-5, 5) = (3, -3)$

Assim, $\exists k \in \mathbb{R}: \vec{u} = k(3, -3)$. Como $\|\vec{u}\| = 6$, então:

$$|k| \times \|(3, -3)\| = 6 \Leftrightarrow |k| \times \sqrt{9+9} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{18}|k| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}|k| = 6 \Leftrightarrow |k| = \frac{6}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |k| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \ \vee \ k = \sqrt{2}$$

Como $\vec{u}$ tem o mesmo sentido que o vetor $\overrightarrow{BA}$, então $k = \sqrt{2}$. Logo, $\vec{u} = \left(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$.

3.2. Comecemos por determinar uma condição da mediatriz do segmento de reta [*AB*]:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=(x+5)^2+(y-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=x^2+10x+25+y^2-10y+25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10y-4y=10x-4x+50-8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y=6x+42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=x+7$$

Como o ponto *P* pertence à mediatriz do segmento de reta [*AB*] e a sua ordenada é igual ao dobro da abcissa, vem que:

$$\begin{cases} y=x+7 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x+7 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=14 \end{cases}$$

Assim, $P(7,14)$.

3.3. Opção (C)

A bissetriz dos quadrantes pares é definida pela condição $y=-x$.

$\overline{OA}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$\overline{OB}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$

A rotação da semirreta $\dot{O}A$ de $180°$ em torno da origem define uma semicoroa circular de centro *O*.

Assim, a condição que define a região plana pretendida é:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 \leq (x-0)^2+(y-0)^2 \leq \left(\sqrt{50}\right)^2 \ \wedge\ y \leq -x \ \Leftrightarrow\ 8 \leq x^2+y^2 \leq 50 \ \wedge\ y \leq -x$$

4. Opção (D)

As retas r e s são paralelas se e só se os seus declives forem iguais.

$$8ax+a^2y-3=0 \Leftrightarrow a^2y=-8ax+3$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{8}{a}x+\frac{3}{a^2}$$

Assim, o declive da reta r é igual a $-\frac{8}{a}$ e o declive da reta s é igual a $\frac{-a^2}{2a}=-\frac{a}{2}$.

Então, para que as retas r e s sejam paralelas, tem-se que:

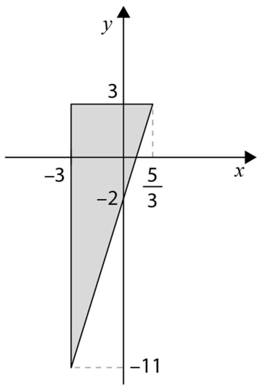
$$-\frac{8}{a}=-\frac{a}{2} \Leftrightarrow 16=a^2$$

$$\Leftrightarrow a=\pm 4$$

Como $a<0$, então $a=-4$.

5. $3x-y \leq 2 \ \wedge\ x \geq -3 \ \wedge\ 3-y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq -3x+2 \ \wedge\ x \geq -3 \ \wedge\ -y \geq -3$

$$\Leftrightarrow y \geq 3x-2 \ \wedge\ x \geq -3 \ \wedge\ y \leq 3$$



x	$y = 3x - 2$
0	-2
$\frac{5}{3}$	3
-3	-11

Cálculo auxiliar

$3 = 3x - 2 \Leftrightarrow 5 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$A = \frac{\left(3+\frac{5}{3}\right)\times(11+3)}{2} = \frac{\frac{14}{3}\times 14}{2} = \frac{14}{3} \times 7 = \frac{98}{3}$ unidades de área

6.

6.1.

6.1.1. $x = 3$

6.1.2. $\overline{VB} = \overline{VC}$, pois a pirâmide [*ABCDV*] é quadrangular regular.

$\overline{VC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1+1)^2 + (2-2)^2} = 3$

Logo, uma condição da superfície esférica de centro em *V* e que passa em *B* é:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

6.1.3. $W(3,-1,-2)$, pois é o simétrico de V em relação a xOy.

Uma condição que define [*VW*] é $x = 3 \ \wedge \ y = -1 \ \wedge -2 \leq z \leq 2$.

6.2. O plano *DVB* é o plano mediador do segmento de reta [*AC*]:

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$

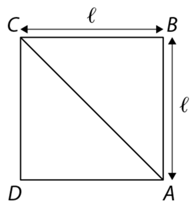
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 2y - 2y + 4z + 4 + 1 - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x - y + z = 0$

6.3. Comecemos por determinar a área da base (quadrado):



$\overline{AC} = d(A,C) = \sqrt{(2-0)^2 + (1+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$

$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 12 = 2l^2 \Leftrightarrow l^2 = 6$

Seja *E* o ponto médio do segmento de reta [*AC*]:

$E\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2,}, \frac{0+2}{2}\right) = (1{,}0{,}1)$

A altura da pirâmide é igual a $\overline{EV}$:

$$\overline{EV} = d(E, V) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Logo, o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3} \times 6 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ unidades de volume.

7. Opção (D)

$$\begin{cases} x = 4 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y^2 + (z+1)^2 = 16 \end{cases}$$

Logo, a interseção da superfície esférica com o plano é uma circunferência de centro de coordenadas $(4, 0, -1)$ e raio igual a 4.