Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

$a^2y + \frac{a}{2}x - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2y = -\frac{a}{2}x + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2a}x + \frac{4}{a^2}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

O declive da reta r é igual a $-\frac{1}{2a}$.

O declive da reta s é igual a $\frac{a-3}{4a}$.

Uma vez que as retas são paralelas: $-\frac{1}{2a} = \frac{a-3}{4a} \Leftrightarrow a - 3 = -\frac{4a}{2a} \Leftrightarrow a - 3 = -2 \Leftrightarrow a = 1$

2.

2.1 $\overline{AB} = \sqrt{\left(2-(-6)\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

Logo, raio = $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$.

A circunferência admite como centro o ponto médio do segmento de reta $[AB]$:

$\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (-2, 1)$

Assim, a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é:

$$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 17$$

$m_{AB} = \frac{2-0}{2-(-6)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Como A pertence a reta:

$0 = \frac{1}{4} \times (-6) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{6}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

$AB: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$m_{AC} = \frac{5-0}{-3-(-6)} = \frac{5}{3}$

Como A pertence à reta:

$0 = \frac{5}{3} \times (-6) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{30}{3} + b \Leftrightarrow b = 10$

$AC: y = \frac{5}{3}x + 10$

Assim, uma condição que define a região representada a sombreado, incluindo a fronteira, é:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 17 \ \wedge \ y \leq \frac{5}{3}x + 10 \ \wedge \ y \geq \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \ \wedge \ x \leq 0$$

2.2 Uma vez que D pertence ao semieixo negativo Oy, a sua abcissa é 0, e a sua ordenada é negativa. Assim:

$m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{2 \pm 4}{2}$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-2}{2} \ \vee \ m = \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \ \vee \ m = 3$$

Se $m = -1$: $y_D = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

Se $m = 3$: $y_D = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

Como $y_D < 0$, então $D(0, -1)$.

$$A_{[ODC]} = \frac{\overline{OD} \times |x_C|}{2} = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

3.

3.1 Opção (D)

(I) $A + \overrightarrow{DG} = F$, logo a igualdade $A + \overrightarrow{DG} = G$ é falsa.

(II) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}$, logo a igualdade $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}$ é verdadeira.

(III) $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC}$,

logo a igualdade $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ é verdadeira.

Assim, conclui-se que apenas as igualdades (II) e (III) são verdadeiras.

3.2 Opção (B)

3.3

3.3.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 5, 0) - (11, -1, 2) = (-3, 6, -2)$

$C = D + \overrightarrow{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$

Uma vez que a superfície esférica tem centro no ponto C e contém o ponto G, a medida do seu raio é igual a $\|\overrightarrow{AB}\|$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

Assim:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 7^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 49$

3.3.2 O conjunto de pontos equidistantes de A e de D é o plano mediador de $[AD]$.

Seja $P(x, y, z)$ um qualquer ponto pertencente ao plano mediador de $[AD]$.

Então, $d(A, P) = d(D, P)$, pelo que:

$$\sqrt{(x - 11)^2 + \left(y - (-1)\right)^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + \left(y - (-3)\right)^2 + (z - 5)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 22x + 121 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 10z + 25$$

$$\Leftrightarrow -22x + 121 + 2y + 1 - 4z + 4 = -10x + 25 + 6y + 9 - 10z + 25$$

$$\Leftrightarrow -12x - 4y + 6z + 67 = 0$$

3.4 $\overrightarrow{OD} = (5, -3, 5) - (0, 0, 0) = (5, -3, 5)$

$\vec{u} = k \times \overrightarrow{OD} = k \times (5, -3, 5), k \in \mathbb{R} = (5k, -3k, 5k), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| = \sqrt{177} &\Leftrightarrow \sqrt{25k^2 + 9k^2 + 25k^2} = \sqrt{177} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{59k^2} = \sqrt{177} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{59} \times |k| = \sqrt{177} \\ &\Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{177}}{\sqrt{59}} \\ &\Leftrightarrow |k| = \sqrt{\frac{177}{59}} \\ &\Leftrightarrow |k| = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow k = -\sqrt{3} \quad \vee \quad k = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OD}$ e $\vec{u}$ têm sentidos contrários, logo $k = -\sqrt{3}$.

Assim, $\overrightarrow{OD} = \left(5 \times (-\sqrt{3}), -3 \times (-\sqrt{3}), 5 \times (-\sqrt{3})\right) = (-5\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$.

4. Opção (A)

$(x, y, z) = (-2, 1, 2) + k(-1, 1, 2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2 - k, 1 + k, 2 + 2k), k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

P é ponto da reta r e tem abcissa 1. Substituindo x por 1 no sistema anterior, obtém-se:

$$\begin{cases} 1 = -2 - k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ y = 1 - 3 \\ z = 2 + 2 \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases}$$

Assim se conclui que as coordenadas do ponto P são $(1, -2, -4)$, pelo que a equação do plano que contém o ponto P e é paralelo ao plano xOy é $z = -4$.

5. Opção (C)

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \leq 81 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + 25 + (z-4)^2 \leq 81 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (z-4)^2 \leq 56 \\ y = 0 \end{cases}$$

Daqui se conclui que o círculo que resulta da interseção da esfera com o plano xOz tem centro no ponto de coordenadas $(-3, 0, 4)$ e raio $\sqrt{56}$, pelo que o valor exato da sua área é 56π.

6.

6.1 $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 4) - (-2, 2, 0) = (2, -2, 4)$

$\overrightarrow{AB} = (4, 2, 0) - (-2, 2, 0) = (6, 0, 0)$

$F = E + \overrightarrow{AB} = (-2, 14, 6) + (6, 0, 0) = (4, 14, 6)$

Assim, uma equação vetorial da reta paralela à reta AC que contém o ponto F é:

$$(x, y, z) = (4, 14, 6) + k(2, -2, 4), k \in \mathbb{R}$$

6.2 $\overrightarrow{AE} = (-2, 14, 6) - (-2, 2, 0) = (0, 12, 6)$

$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 4) - (0, 0, 0) = (0, 0, 4)$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OC} = (0, 12, 6) + (0, 0, 4) = (0, 12, 10)$

$$\left\|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OC}\right\| = \|(0, 12, 10)\| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 10^2} =$$
$$= \sqrt{144 + 100} =$$
$$= \sqrt{244} =$$
$$= 2\sqrt{61}$$

7. O ponto de interseção das mediatrizes de $[AB]$, $[AC]$ e de $[BC]$ é o centro da circunferência que contém os pontos A, B e C.

Assim, para determinar as coordenadas do centro da circunferência, podemos determinar a interseção das mediatrizes de $[AB]$ e de $[AC]$, por exemplo.

Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à mediatriz de $[AB]$.

Então, $d(A, P) = d(B, P)$, pelo que:

$$\sqrt{\left(x - (-6)\right)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{\left(x - (-5)\right)^2 + (y - 5)^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 10y + 25$

$\Leftrightarrow 12x + 36 - 8y + 16 = 10x + 25 - 10y + 25$

$\Leftrightarrow 2y = -2x - 2$

$\Leftrightarrow y = -x - 1$

Assim, a reta de equação $y = -x - 1$ é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à mediatriz de $[AC]$.

Então, $d(A, P) = d(C, P)$, pelo que:

$$\sqrt{\left(x - (-6)\right)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{\left(x - (-2)\right)^2 + \left(y - (-4)\right)^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16$

$\Leftrightarrow 12x + 36 - 8y + 16 = 4x + 4 + 8y + 16$

$\Leftrightarrow -16y = -8x - 32$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 2$

Assim, a reta de equação $y = \frac{x}{2} + 2$ é a mediatriz de $[AC]$.

O ponto de interseção das retas mediatrizes é o centro da circunferência.

Assim:

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = \dfrac{x}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2 = -x - 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = -2x - 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -6 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{-2}{2} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore (-2, 1)$

$r = \sqrt{(-2+6)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

A equação reduzida da circunferência pedida é $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.