Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

I. $\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)-\left(a-b^{\frac{1}{2}}\right)^2=$

$=a^2-b-\left(a^2-2ab^{\frac{1}{2}}+b^{2\times\frac{1}{2}}\right)=$

$=a^2-b-a^2+2ab^{\frac{1}{2}}-b=$

$=-2b+2a\sqrt{b}$

II. $\left(a^{\frac{2}{5}}\div a^{-\frac{1}{10}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=$

$=a^{\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{10}\right)}\times b^{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=$

$=a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}\times b^{\frac{1}{2}}=$

$=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=$

$=(a\times b)^{\frac{1}{2}}=$

$=\sqrt{ab}$

Assim, podemos afirmar que ambas as afirmações são verdadeiras.

2. $A_{[IJE]}=3\sqrt{3}$

Logo, $\frac{\sqrt{6}\times\overline{IE}}{2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{6}\times\overline{IE}=6\sqrt{3}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\overline{IE}=3\sqrt{2}$

As faces $[ABE]$ e $[IJE]$, são semelhantes, pelo que $\frac{\overline{IE}}{\overline{IJ}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$

Assim, $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\overline{AE}}{\sqrt{3}+2}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\overline{AE}=3+\frac{6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\overline{AE}=3+\frac{6\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\overline{AE}=3+2\sqrt{3}$

$V_{[ABCDEFGH]}=\left(\overline{AB}\right)^2\times\overline{AE}$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(\sqrt{3}+2\right)^2\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(3+4\sqrt{3}+4\right)\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(4\sqrt{3}+7\right)\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=12\sqrt{3}+24+21+14\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=45+26\sqrt{3}$

$V_{[ABCDEFGH]}=\left(45+26\sqrt{3}\right)$ u.v.

3.

3.1 A circunferência $\mathcal{C}$ tem centro no ponto de coordenadas $(4, -2)$, pelo que a sua equação reduzida será do tipo $(x-4)^2 + (y-(-2))^2 = r^2$.

Como a reta r contém o ponto A, que pertence semieixo positivo Ox:

$A(x, 0)$: $0 = -\dfrac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow x = 3$

Logo, $A(3, 0)$.

$r = \overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$

Assim, $(x-4)^2 + (y-(-2))^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 5$

3.2 Interseção da circunferência com a reta r:

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \left(-\frac{x}{3} + 1 + 2\right)^2 = 5 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

Assim: $(x-4)^2 + \left(-\frac{x}{3} + 3\right)^2 = 5 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \frac{x^2}{9} - 2x + 9 = 5 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow 10x^2 - 90x + 180 = 0 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times 18}}{2} \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2} \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = 6) \wedge y = -\frac{x}{3} + 1$

$A(3, 0)$

$B\left(6, -\dfrac{6}{3} + 1\right) = B(6, -1)$

3.3 $m_r = -\frac{1}{3}$

$\vec{r}(3, -1)$ (por exemplo)

$(x, y) = (4, -2) + k(3, -1),\ k \in \mathbb{R}$

4. Opção (A)

$A(0, 2)$; $C(6, 4)$; $D(0, 8)$.

$m_{CD} = \frac{8-4}{0-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$

$CD\colon y = -\frac{2}{3}x + 8$

Assim, uma condição que define o conjunto de pontos da região a sombreado incluindo as fronteiras é $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq \frac{4}{3}x - 4 \wedge \ y \geq 2 \wedge y \leq -\frac{2}{3}x + 8$.

5.

5.1 Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto da mediatriz de $[AB]$:

$d(A, P) = d(B, P)$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-(-3))^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-1))^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow 6y - 2y = -8x + 2x - 10 + 17$

$\Leftrightarrow 4y = -6x + 7$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

5.2 Opção (D)

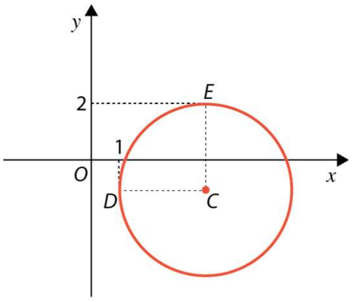
Como B é ponto médio de um segmento de reta $[AC]$, considerando (x, y) como coordenadas do ponto C, então:

$\frac{1+x}{2} = 4 \wedge \frac{-3+y}{2} = -1$

$\Leftrightarrow x = 7 \wedge y = 1$

5.3 Uma vez que a circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(4, -1)$ e tem raio 3, a equação reduzida da mesma será $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Sendo D e E os pontos da circunferência com menor abcissa e maior ordenada, podemos concluir que $D(x, -1)$ e $E(4, y)$. Como a circunferência tem centro de coordenadas $(4, -1)$ e raio 3, então D tem coordenadas $(4-3, -1) = (1, -1)$ e E tem coordenadas $(4, -1+3) = (4, 2)$.



$\overline{DE} = \sqrt{(4-1)^2 + \left(2-(-1)\right)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$A = (\overline{DE})^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 = 18\ u.a.$

6. Opção (B)

Uma vez que o ponto P pertencente à bissetriz dos quadrantes pares, a sua abcissa é simétrica da sua ordenada, pelo que:

$m^2 - 3m = -(16 - 5m)$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m = -16 + 5m$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 16 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{8}{2}$

$\Leftrightarrow m = 4$

7. Opção (C)

(A) $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{GE}$ **(V)**

(B) $F + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CH} = E + \overrightarrow{CH} = B$ **(V)**

(C) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA}$ **(F)**

(D) $\|\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JH}\| = \|\overrightarrow{CH}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$ **(V)**

8. $\overrightarrow{BA} = A - B = (2,-1) - (1,-4) = (1,3)$

$C = B + 2\overrightarrow{BA} = (1,-4) + 2(1,3) = (1,-4) + (2,6) = (3,2)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,2) - (1,-4) = (2,6)$

Para $\vec{u}$ ser colinear com $\overrightarrow{BC}$, tem de ser da forma $(2k, 6k)$, $k \in \mathbb{R}$, e para ter norma igual a $3\sqrt{2}$, tem-se que $\sqrt{(2k)^2 + (6k)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + 36k^2} = \sqrt{18}$

$\Leftrightarrow 40k^2 = 18$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{18}{40}$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{20}$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{9}{20}} = \pm\frac{3}{\sqrt{20}} = \pm\frac{3}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Para $\vec{u}$ ter sentido contrário ao de $\overrightarrow{BC}$:

$k = -\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Assim, $\vec{u} = \left(2 \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right), 6 \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\right) = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)$.

9. Seja $a \in \mathbb{R}^+$. De acordo com os dados do enunciado $D(0,a)$; $A(-2a, 0)$; $B\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ e $C\left(0, \frac{2a}{3}\right)$.

Assim:

$m = \frac{\frac{2a}{3} - 0}{0 - (-2a)} = \frac{\frac{2a}{3}}{2a} = \frac{1}{3}$

$n = \frac{0 - a}{\frac{a}{3} - 0} = \frac{-a}{\frac{a}{3}} = -3$

$m \times n = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$, c.q.p.