TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

Dadas as condições da figura e do enunciado, os pontos da reta *BC* têm ordenada 3 e cota 1.

Uma condição que define a reta *BC* é, então, $y = 3 \ \wedge \ z = 1$.

1.2. $V(-2,2,4)$

$C(-3,3,1)$

$M = \left(\frac{-2+(-3)}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-2,2,0)$

Uma equação vetorial da reta paralela à reta *AC* e que passa em *M* é:

$$(x,y,z) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) + k(-2,2,0), k \in \mathbb{R}$$

1.3. $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, pois $[AB]$ é um dos lados do quadrado $[ABCD]$, que é a base da pirâmide.

$\vec{u} = k\overrightarrow{AC}, \ \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$= (-2, 2, 0) =$

$= (-2k, 2k, 0)$

Para que $\|\vec{u}\| = 2$, vem que:

$$\sqrt{(-2k)^2 + (2k)^2 + 0^2} = 2$$

Logo:

$4k^2 + 4k^2 = 4 \Leftrightarrow 8k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para que $\vec{u}$ tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}, k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim:

$\vec{u} = \left(-2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0\right) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$

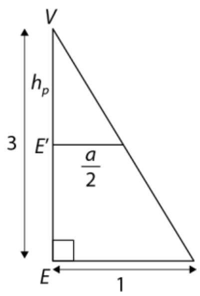
1.4. $V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 4$

$V_{[A'B'C'D'V]} = \frac{1}{3} \times a^2 \times h_p$, onde a é o lado do quadrado$[A'B'C'D']$ e h_p é a altura da pirâmide $[A'B'C'D'V]$, ambos em função de z, cota do ponto P.

Cálculo auxiliar

(1) $h_p = 4 - z$

(2)

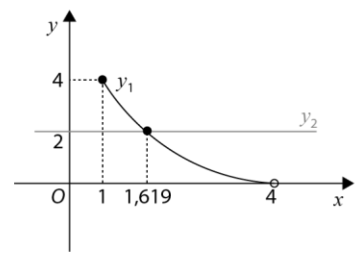


O ponto *E* é o centro da base [*ABCD*] e E' é o centro da base $[A'B'C'D']$.

Como $\frac{1}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{h_p}$, vem que $a = \frac{2}{3}h_p$.

Logo, de (1), tem-se que $a = \frac{2}{3}(4 - z)$.

Assim, de (1) e de (2), vem que:



$$V_{[A'B'C'D'V]} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}(4 - z)\right)^2 \times (4 - z) = \frac{4}{27}(4 - z)^3$$

Pretende-se então o valor de z tal que $V_{[A'B'C'D'V]} = 2$.

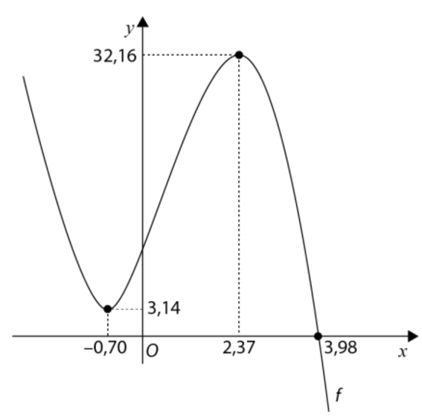
Na calculadora gráfica:

$y_1 = \frac{4}{27}(4 - x)^3$ $\qquad$ $y_2 = 2$

z é então, aproximadamente, $1{,}619$ e as coordenadas do ponto *P* são (0; 0; 1,619).

2.

2.1. Opção (B)



Utilizando as capacidades gráficas da calculadora e sabendo que a função f tem um zero (a), um mínimo relativo (b) e um máximo relativo (c), concluímos que:

$a \approx 3{,}98$

$b \approx 3{,}14$

$c \approx 32{,}16$

2.2.

$$\begin{array}{r|l}
-2x^3 + 5x^2 + 10x + 7 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
+2x^3 \qquad\quad - 2x \qquad & -2x + 5 \\ \hline
5x^2 + 8x + 7 & \\
-5x^2 \qquad\quad + 5 & \\ \hline
8x + 12 &
\end{array}$$

Temos, então, que $P(x) = (x^2 - 1) \times (-2x + 5) + (8x + 12)$.

Logo, $Q(x) = -2x + 5$ e $R(x) = 8x + 12$.

2.3. $P(x) > 7 \Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 10x + 7 > 7 \Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 10x > 0$

Cálculo auxiliar

$-2x^3 + 5x^2 + 10x = x(-2x^2 + 5x + 10)$

$-2x^2 + 5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-2)\times 10}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{105}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-5-\sqrt{105}}{-4} \quad \vee \quad \Leftrightarrow x = \frac{-5+\sqrt{105}}{-4}$

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{105}}{4}$		0		$\frac{5+\sqrt{105}}{4}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x^2 + 5x + 10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$-2x^3 + 5x^2 + 10x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{105}}{4}\right[\cup \left]0, \frac{5+\sqrt{105}}{4}\right[$$

Caderno 2

3. Opção (C)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -x + 3 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - 16 \neq 0\} =]-\infty, 3]\backslash\{-4\}$

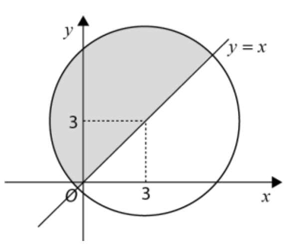
Cálculo auxiliar

$-x \geq -3 \ \wedge \ x^2 \neq 16 \Leftrightarrow x \leq 3 \ \wedge \ x \neq 4 \ \wedge \ x \neq -4$

4. $x^2 + y^2 - 6x - 6y \leq -2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 - 6y + 3^2 \leq -2 + 3^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 16$

A condição representa um círculo de centro no ponto de coordenadas $C(3, 3)$ e raio $= \sqrt{16} = 4$.



$$A_{\text{sombreada}} = \frac{A_{\text{círculo}}}{2} = \frac{\pi\times 4^2}{2} = 8\pi \text{ u.a.}$$

5.

5.1. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma translação associada ao vetor $(-2, 0)$, seguida de uma reflexão segundo o eixo Ox.

Os zeros são, então, $-4 - 2 = -6$ e $3 - 2 = 1$, sendo que a reflexão segundo o eixo Ox não tem qualquer efeito nos zeros da função.

5.2. Opção (D)

O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por uma reflexão segundo o eixo Oy, seguida de uma translação associada ao vetor (0, 1).

5.3. $(m \circ f)(-4) = m\big(f(-4)\big) = m(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$

$m^{-1}(7) = 6$, pois $m(x) = 7 \Leftrightarrow 2x - 5 = 7 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$, isto é, $m(6) = 7$, logo $m^{-1}(7) = 6$.

Assim:

$(m \circ f)(-4) + m^{-1}(7) = -5 + 6 = 1$

6. Opção (A)

$c \times l = 4$

$c \times \left(\sqrt{5} - 1\right) = 4 \Leftrightarrow c = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$ e $\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$

$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$

$= \sqrt{5} + 1 =$

$= 5^{\frac{1}{2}} + 1$

7. Sabe-se que o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e com vértice no ponto de coordenadas $\left(-\frac{-8}{2\times2}, f\left(-\frac{-8}{2\times2}\right)\right) = \big(2, f(2)\big) = (2, -18)$.

Sabe-se também que f tem dois zeros: -1 e 5

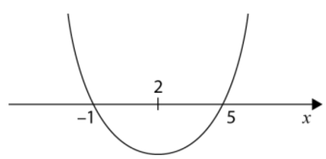
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \quad \vee \quad x = \frac{4-6}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -1$

Um esboço desta parábola é:



Logo:

- a função f é crescente em $[2, +\infty[$ e, por isso, p é uma proposição verdadeira;
- a função f é negativa em $]-1, 5[$ e, por isso, q é uma proposição verdadeira;
- o eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 2$, logo a proposição r é falsa.

Assim:

$\big((\sim p \Rightarrow q) \ \vee \ r\big) \Leftrightarrow ((\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \vee \ \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \ \vee \ \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

8. $g(x) = a|x - b| + c$

Como $D'_g =]-\infty, 4]$, tem-se que $a < 0$ e $c = 4$.

Como -5 e 11 são zeros de g e $|-5 - b| = |11 - b|$, então $b = \frac{-5+11}{2} = 3$.

Assim, $g(x) = a|x - 3| + 4$.

Como o ponto de coordenadas $(11, 0)$ pertence ao gráfico de g, vem que:

$0 = a|11 - 3| + 4 \Leftrightarrow 8a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.