# Teste N.º 5 – Proposta de resolução

**1.**

**1.1. Opção (D)**

$\overrightarrow{EF} = (10, 8, 6) - (8, 5, 0) = (2, 3, 6)$

$EF: (x, y, z) = (8, 5, 0) + k(2, 3, 6), k \in \text{IR}$

$P$ pertence à reta $EF$ se e só se:

$$(3a, a, -6) = (8,5,0) + k(2,3,6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 8 + 2k \\ a = 5 + 3k \\ -6 = 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 8 - 2 \\ a = 5 - 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

**1.2.** $D = B + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = (16, -4,10) + (-2, -3, -6) + (-6, -2, 3) =$

$= (8, -9, 7)$

| **Cálculos auxiliares** |
| --- |
| $\overrightarrow{FE} = (8, 5, 0) - (10, 8, 6) = (-2, -3, -6)$ |
| $\overrightarrow{FG} = (4, 6, 9) - (10, 8, 6) = (-6, -2, 3)$ |

Seja $M$ o ponto médio de $[BD]$:

$M\left(\frac{16+8}{2}, \frac{-4+(-9)}{2}, \frac{10+7}{2}\right) = \left(12, -\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$

$d = \overline{BD} = \sqrt{(16-8)^2 + (-4+9)^2 + (10-7)^2} =$

$= \sqrt{64 + 25 + 9} =$

$= \sqrt{98}$

$r = \frac{\sqrt{98}}{2}$ $\quad r^2 = \frac{98}{4} = \frac{49}{2}$

A equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[BD]$ é:

$$(x-12)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{49}{2}$$

**1.3.** O plano $[DBF]$ é o plano mediador do segmento de reta $[EG]$:

$(x-8)^2 + (y-5)^2 + z^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-9)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 18z + 81$

$\Leftrightarrow -8x + 2y + 18z - 44 = 0$

$\Leftrightarrow -4x + y + 9z - 22 = 0$

**2. Opção (D)**

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: -f(x) \geq 0 \wedge f(2x) \neq 0\}$

$-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \ \vee\ 0 \leq x \leq 4$

$f(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \ \vee\ 2x = 0 \ \vee\ 2x = 4 \Leftrightarrow x = -1 \ \vee\ x = 0 \ \vee\ x = 2$

$D_g = ]-\infty, -2] \cup ]0, 2[ \cup ]2, 4]$

**3.**

**3.1.** $f(x) = -\frac{1}{2}|x-4| + 6 \qquad g(x) = \frac{3}{4}|x-4|$

$A\left(x,\ -\frac{1}{2}|x-4| + 6\right),\ \ 0 < x < 4$

Como $0 < x < 4$, então:

$$-\frac{1}{2}|x-4| + 6 = -\frac{1}{2}(4-x) + 6 = -2 + \frac{x}{2} + 6 = 4 + \frac{x}{2}$$

$A\left(x,\ 4 + \frac{x}{2}\right)$

$D\left(x,\ \frac{3}{4}|x-4|\right),\ \ 0 < x < 4$

Como $0 < x < 4$, então:

$\frac{3}{4}|x-4| = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$

$D\left(x, 3 - \frac{3}{4}x\right)$

$$\overline{AD} = \left|4 + \frac{x}{2} - \left(3 - \frac{3}{4}x\right)\right| = \left|4 + \frac{x}{2} - 3 + \frac{3}{4}x\right| = \left|1 + \frac{5}{4}x\right| = 1 + \frac{5}{4}x$$

$\overline{AB} = 2(4-x) = 8 - 2x$

$$h(x) = \left(1 + \frac{5}{4}x\right)(8-2x) = 8 - 2x + 10x - \frac{5}{2}x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + 8x + 8,\ \ 0 < x < 4$$

**3.2.** $h$ é uma restrição de uma função quadrática. Assim, o máximo de $h$ será a ordenada do vértice da parábola que a representa.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$

$h\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{5}{2} \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 8 \times \frac{8}{5} + 8 = -\frac{32}{5} + \frac{64}{5} + 8 = \frac{72}{5}$

O retângulo tem área máxima quando o ponto $A$ tem abcissa $\frac{8}{5}$ e o valor da área máxima é $\frac{72}{5}$ u.a.

**3.3.** $h(x) > 14 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x^2 + 8x + 8 > 14 \quad \wedge \quad 0 < x < 4$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x^2 + 8x - 6 > 0 \quad \wedge \quad 0 < x < 4$

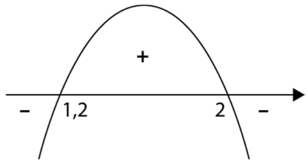
$\Leftrightarrow -5x^2 + 16x - 12 > 0 \quad \wedge \quad 0 < x < 4$

**Cálculo auxiliar**

$-5x^2 + 16x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \times (-5) \times (-12)}}{-10} \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{-10}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm 4}{-10}$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = 1{,}2$




$-5x^2 + 16x - 12 > 0 \;\wedge\; 0 < x < 4 \Leftrightarrow 1{,}2 < x < 2$

C.S. $= ]1{,}2; 2[$

**4.**

**4.1. Opção (B)**

$f(x) = k$ tem exatamente 3 soluções se a reta $y = k$ intersetar o gráfico de $f$ em 3 pontos, logo $k \in ]-3, 3]$.

**4.2. Opção (C)**

Sabemos que $f$ não é injetiva ($f(4) = f(5)$) e que 5 é máximo absoluto de $f$.

Sabemos ainda que $D'_f = [-13, 5]$.

$g_1(x) = f(2x)$ e $D'_{g_1} = [-13, 5]$

$g_2(x) = -0{,}5g_1(x) = -0{,}5f(2x)$ e $D'_{g_2} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right]$

$g(x) = g_2(x) - \frac{1}{2} = -0{,}5f(2x) - \frac{1}{2}$ e $D'_g = [-3, 6]$

Logo, apenas a afirmação I é falsa.

**4.3.**

- Para $x < 1$:

  $f(x) = a(x+1)^2 + 5$

  Como o ponto de coordenadas $(-4, -13)$ pertence ao gráfico de $f$:

  $a(-4+1)^2 + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a = -18 \Leftrightarrow a = -2$

  $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$

- Para $1 \leq x \leq 3$:

  $f(x) = mx + b$

  $m = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

  $f(x) = 3x + b$

  Como o ponto de coordenadas $(1, -3)$ pertence ao gráfico de $f$:

  $3 \times 1 + b = -3 \Leftrightarrow b = -6$

  $f(x) = 3x - 6$

- Para $x > 3$: $f(x) = 5$

  Assim:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1)^2 + 5 & \text{se} \quad x < 1 \\ 3x - 6 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 5 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

**5.** $f(x) = (x-2)^2 - mx + 1$

$4 \notin D'_f$ se e só se $f(x) = 4$ é uma equação impossível.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 - mx + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - mx + 1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + (-4 - m)x + 1 = 0$

A equação acima é impossível se e só se:

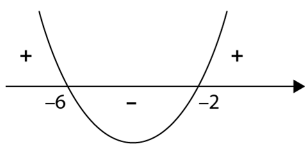
$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-4 - m)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow 16 + 8m + m^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 12 < 0$

**Cálculo auxiliar**

$m^2 + 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow m = -6 \ \vee \ m = -2$




$m^2 + 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow -6 < m < -2$

C.S. $= ]-6, -2[$

**6.**

**6.1.** $P(a, -a^2 + 4a)$ $\qquad$ $Q(a, 2a - 8)$

$d(P, Q) = \sqrt{(a-a)^2 + (2a - 8 + a^2 - 4a)^2} = \sqrt{(a^2 - 2a - 8)^2} =$

$= |a^2 - 2a - 8| =$

$= |-a^2 + 2a + 8|$

**6.2.** $\overline{PQ} = |-a^2 + 2a + 8|$

$r = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{|-a^2+2a+8|}{2}$

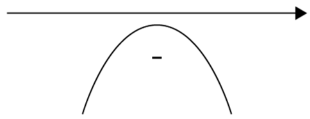
$P_{\text{circunferência}} = 2\pi r = \frac{2\pi|-a^2+2a+8|}{2} = \pi|-a^2 + 2a + 8|$

$$\pi|-a^2 + 2a + 8| > 16\pi \Leftrightarrow |-a^2 + 2a + 8| > 16$$
$$\Leftrightarrow -a^2 + 2a + 8 > 16 \quad \vee \quad -a^2 + 2a + 8 < -16$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{-a^2 + 2a - 8 > 0}_{\text{Condição impossível}} \ \vee \quad -a^2 + 2a + 24 < 0$$

**Cálculos auxiliares**

- $-a^2 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\times 8}}{-2}$

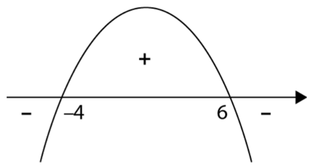
  $\Leftrightarrow \underbrace{a = \frac{-2\pm\sqrt{-28}}{-2}}_{\text{Equação impossível}}$




- $-a^2 + 2a + 24 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\times(-1)\times 24}}{-2}$

  $\Leftrightarrow a = \frac{-2\pm 10}{-2}$

  $\Leftrightarrow a = -4 \quad \vee \quad a = 6$




$\underbrace{-a^2 + 2a - 8 > 0}_{\text{Condição impossível}} \ \vee -a^2 + 2a + 24 < 0 \Leftrightarrow a < -4 \vee a > 6$

$\text{C.S.} = ]-\infty, -4[ \cup ]6, +\infty[$

O perímetro da circunferência de diâmetro $[PQ]$ é superior a $16\pi$ para $a \in ]-\infty, -4[ \cup ]6, +\infty[$

**7. Opção (C)**

$$\begin{cases} A(1) = 0 \\ A(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 1 + b + c = 0 \\ -1 + 1 - b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ c = b - 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + b - 4 = -2 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 - 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

**8.** De acordo com o enunciado, sabe-se que, uma hora após o instante $t_0$, $t_0 \in [0, 4]$, o número de bactérias presente no depósito aumentou $10\%$, ou seja, para $t_0 \in [0, 4]$:

$N(t_0 + 1) = N(t_0) + N(t_0) \times 0{,}10$

$\Leftrightarrow N(t_0 + 1) = N(t_0) \times 1{,}10$

$\Leftrightarrow (t_0 + 1 + 4)^2(t_0 + 1 - 14) + 96(t_0 + 1) + 260 = ((t_0 + 4)^2(t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1{,}10$

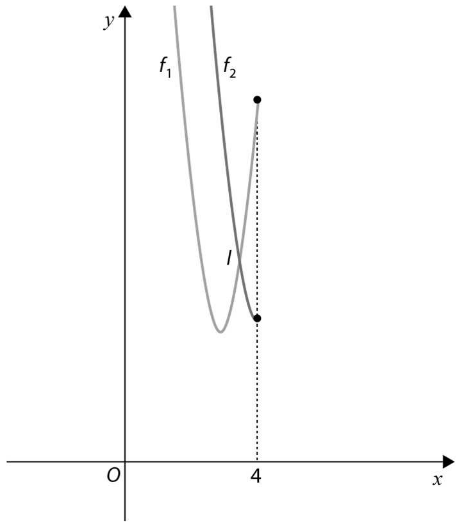
$\Leftrightarrow (t_0 + 5)^2(t_0 - 13) + 96(t_0 + 1) + 260 = ((t_0 + 4)^2(t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1{,}10$

Usando a letra $x$ como variável independente e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = (x + 5)^2(x - 13) + 96(x + 1) + 260$ e

$f_2(x) = ((x + 4)^2(x - 14) + 96x + 260) \times 1{,}10$

$I(3{,}52; 5{,}78)$




Assim, $t_0 \approx 3{,}52$, logo o número de bactérias nesse instante é, aproximadamente:

$N(3{,}52) = (3{,}52 + 4)^2(3{,}52 - 14) + 96 \times 3{,}52 + 260 \approx 5{,}3$

O número de bactérias no instante $t_0$ é, aproximadamente, 5,3 milhões de bactérias.