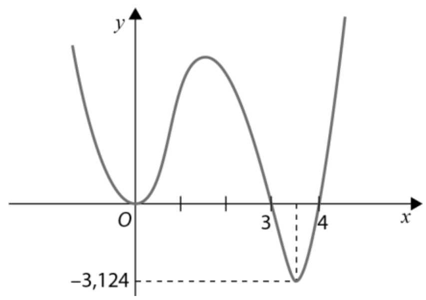
TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

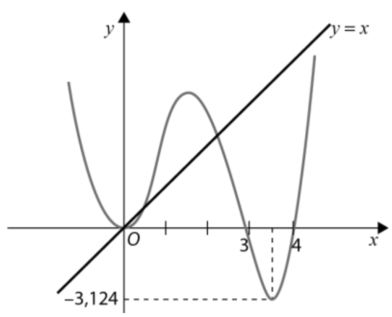
1.1. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtemos os zeros de f (0, 3 e 4) e o mínimo, aproximadamente $-3{,}124$.



Assim, $a = 0$, $b = 3, c = 4$ e $d \approx -3{,}124$.

1.2. Opção (B)

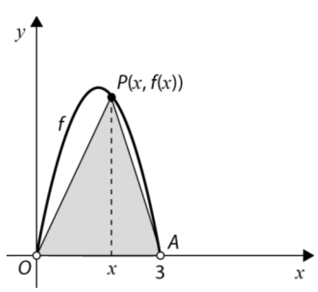
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ não é verdadeira, pois a função f não é positiva ou nula, para todo o valor real x. Por observação do gráfico de f, tem-se que f é negativa em $]3{,}4[$;
- $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = x$ é verdadeira, pois verifica-se que o gráfico da função f interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares.



Note-se que bastaria observar que $f(0) = 0$ para concluir que a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = x$ é verdadeira.

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ não é verdadeira, pois a função f não é crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$. Por exemplo, $1 < 3 \wedge f(1) > f(3)$.
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ não é verdadeira, pois a função f não é injetiva. Por exemplo, $0 \neq 4 \wedge f(0) = f(4)$.

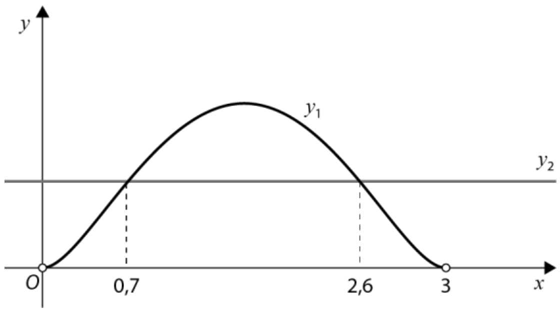
1.3.



$P(x, f(x))$

$$A_{\Delta[OAP]} = \frac{3 \times f(x)}{2}$$

Pretende-se, então, determinar os valores de $x \in]0,3[$ tais que $\frac{3f(x)}{2} = 5$.



$$y_1 = \frac{3f(x)}{2}$$

$$y_2 = 5$$

Os valores pretendidos são $x \approx 0{,}7$ e $x \approx 2{,}6$.

2.

2.1. Seja V o volume do prisma e h a altura do prisma:

$V = 784$

$A_{\text{base}} \times h = 784 \Leftrightarrow 98 \times h = 784$

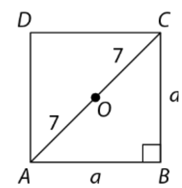
$\Leftrightarrow h = 8$

Cálculo auxiliar

$a^2 + a^2 = 14^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 = 196$

$\Leftrightarrow a^2 = 98$



O plano EFG pode então ser definido pela condição $z = 8$.

2.2. $B(0{,}7{,}0)$ $\quad$ $H(0,-7{,}8)$

$\overrightarrow{BH} = H - B = (0,-14,8)$

Uma equação vetorial da reta BH é $(x,y,z) = (0{,}7{,}0) + k(0,-14,8), k \in \mathbb{R}$.

2.3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 35 \ \wedge \ x = 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 4y - 6z = 35 \ \wedge \ x = 0$ é uma condição que define uma circunferência. Como:

$y^2 + z^2 - 4y - 6z = 35 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 2^2 + z^2 - 6z + 3^2 = 35 + 2^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (z-3)^2 = 48$

tem-se que o raio desta circunferência é $\sqrt{48}$. Assim, o seu perímetro é $2\pi \times \sqrt{48} \approx 43{,}53$ unidades de comprimento.

2.4. Opção (B)

p: "$B + \overrightarrow{CH} = E$" $\qquad p \Leftrightarrow \text{V}$

q: "$\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}\| = 8$" $\qquad q \Leftrightarrow \text{V}$

Cálculo auxiliar

$\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EF}\| = \|\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{FE}\| = \|\overrightarrow{HD}\| = 8$

- $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \wedge \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \vee \text{F}) \Leftrightarrow \text{V}$
- $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$

Caderno 2

3. Opção (C)

$$2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{2}}+2^{-\frac{3}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=3\sqrt{2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

Logo, $k=\frac{15}{4}$.

4. A função g definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pois $D_g=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \ \wedge \ x\neq 0\}$.

Assim, a representação gráfica apresentada em (II) não poderá ser a representação gráfica de g, pois apresenta-nos uma representação gráfica de uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Como f é uma função ímpar, tem-se que $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$.

Assim, $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$, ou seja, $g(-x)=g(x), \forall x\in D_g$, logo g é uma função par, o que exclui a opção apresentada em (I), já que esta é a representação gráfica de uma função ímpar (o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial).

Como $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}^-$ e $x<0, \forall x\in\mathbb{R}^-$, tem-se que $g(x)=\frac{f(x)}{x}>0, \forall x\in\mathbb{R}^-$, o que não se verifica na representação gráfica (III), que apresenta uma função negativa em todo o seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5.

5.1.

Cálculo auxiliar

$f(x)=0$

$-x^2-x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times 6}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x=3 \ \vee \ x=-2$

A função f, de domínio $\mathbb{R}$, tem dois zeros. Como o gráfico da função g se pode obter do gráfico da função f por uma translação associada ao vetor de coordenadas (2, 0), então a função g tem o mesmo número de zeros da função f. Assim, a proposição p é falsa.

(Naturalmente, a mesma conclusão se obteria determinando os zeros da função g,

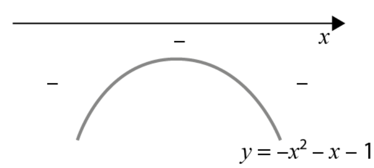
$g(x)=f(x-2)=-(x-2)^2-(x-2)+6$).

Cálculos auxiliares

$f(x)\leq 7$

$-x^2-x+6\leq 7 \Leftrightarrow -x^2-x-1\leq 0$

$-x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times(-1)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{-2}}_{\text{equação impossível}}$



Verifica-se, assim, que $f(x) \leq 7$ tem conjunto-solução $\mathbb{R}$, sendo então uma condição universal em $\mathbb{R}$ e q é uma proposição verdadeira.

5.2. Seja V_f o vértice da parábola que representa graficamente a função f.

Sabe-se que $V_f = \left(\frac{-(-1)}{2\times(-1)}, f\left(\frac{-(-1)}{2\times(-1)}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Cálculo auxiliar

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$

Seja V_h o vértice da parábola que representa graficamente a função h: $V_h = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4} + k\right)$

Para que este ponto pertença ao terceiro quadrante, a abcissa e a ordenada têm de ser negativas.

$-\frac{1}{2} < 0 \ \wedge \ \frac{25}{4} + k < 0$, logo $k < -\frac{25}{4}$.

Assim, $k \in \left]-\infty, -\frac{25}{4}\right[$.

6.

6.1. $(x, -4) = (3, -2) + k(5, -1), \ k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ -4 = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ k = 2 \end{cases}$

Logo, $P(13, -4)$.

Para que a circunferência tenha centro no ponto P, de coordenadas $(13, -4)$, e seja tangente à reta r definida por $x = -2$, o raio tem de ser $13 + |-2| = 15$.

Uma equação da circunferência pedida é, então:

$$(x - 13)^2 + (y + 4)^2 = 15^2$$

6.2.

6.2.1.

Cálculo auxiliar

$7x + 10y = 0 \Leftrightarrow 10y = -7x \Leftrightarrow y = -\frac{7}{10}x$

- s: $\quad y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

  r: $\quad x = -2$

  $y = -\frac{7}{10} \times (-2) + \frac{13}{5} \Leftrightarrow y = \frac{14}{10} + \frac{26}{10} \Leftrightarrow y = \frac{40}{10} \Leftrightarrow y = 4$

  Logo, $A(-2, 4)$.

- t: $(x, y) = (3, -2) + k(5, -1), \ k \in \mathbb{R}$

  r: $x = -2$

  $(-2, y) = (3, -2) + k(5, -1)$, para algum $k \in \mathbb{R}$

  $\begin{cases} -2 = 3 + 5k \\ y = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

  Logo, $B(-2, -1)$.

- $s\colon\ y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

  $t\colon\ (x\,, y) = (\,3\,, -2) + k(5\,, -1), k \in \mathbb{R}$

  Equação reduzida da reta t:

  $y = -\dfrac{1}{5}x + b$

  Como $(3, -2)$ pertence à reta t, tem-se:

  $-2 = -\dfrac{1}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -2 + \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow b = -\dfrac{7}{5}$

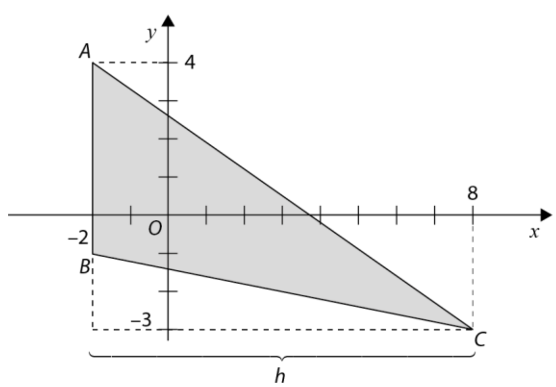
  Assim, $t\colon\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$.

  $\begin{cases} y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{10}x + \frac{7}{10}x = \frac{13}{5} + \frac{7}{5} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{10}x = \frac{20}{5} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 4 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{5} \times 8 - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$

  Logo, $C(8, -3)$.

6.2.2.



$\overline{AB} = 4 + |-1| = 5$

$h = 8 + |-2| = 10$

$A = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{5 \times 10}{2} = 25$ u.a.

7.

7.1. Opção (B)

Em $x < 2$:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \ \wedge \ x < 2 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \ \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \ \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow (x = 4 \ \vee x = -1) \ \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow x = -1$

Em $x \geq 2$:

$$x^3 - 1 = 0 \ \wedge \ x \geq 2 \ \Leftrightarrow x^3 = 1 \ \wedge \ x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 1 \ \wedge \ x \geq 2}_{\text{condição impossível}}$$

-1 é o único zero da função f.

7.2. Opção (A)

$$(f \circ h^{-1})(4) = f\left(h^{-1}(4)\right) = f(0) = 0^2 - 0 - 4 = -4$$

Cálculo auxiliar

$h(x) = 4$

$2x + 4 = 4 \Leftrightarrow \ 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Logo, $h^{-1}(4) = 0$.