Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1. $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Logo, $C(2,3)$.

1.2. $A(\ldots, 3)$

$$\begin{cases} y = 3 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (x-2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$A(-1, 3)$, pois A tem abcissa negativa.

$B(\ldots, 0)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$B(2, 0)$

$AB: y = mx + b$

$$m = \frac{0-3}{2+1} = -\frac{3}{3} = -1$$

$y = -x + b$

Como o ponto $B(2,0)$ pertence à reta, vem que: $0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$

$AB: y = -x + 2$

1.3. $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 4}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$D(0, 3+\sqrt{5})$, pois D é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox de maior ordenada.

$E(0, 3-\sqrt{5})$

$\overline{DE} = \left(3+\sqrt{5}\right) - \left(3-\sqrt{5}\right) = 3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$A_{[DEC]} = \frac{\overline{DE} \times \text{abcissa de } C}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 2}{2} = 2\sqrt{5}$ u.a.

2.

2.1. Opção (B)

Um plano paralelo ao plano xOz pode ser definido por uma condição do tipo $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como passa pelo ponto $H(3,8,15)$, então $y = 8$ define o plano paralelo a xOz que passa no ponto H.

2.2. $\overrightarrow{DB} = (0,6,0) - (1,-2,2) = (-1,8,-2)$

$\overrightarrow{BA} = (4,0,0) - (0,6,0) = (4,-6-0)$

$\overrightarrow{DA} = (4,0,0) - (1,-2,2) = (3,2,-2)$

$$\begin{aligned} F = H + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} &= (3,8,15) + (4,-6,0) + (3,2,-2) = \\ &= (7,2,15) + (3,2,-2) = \\ &= (10,4,13) \end{aligned}$$

Uma equação vetorial da reta paralela á reta DB que passa em F é:

$$(x, y, z) = (10,4,13) + k(-1,8,-2), k \in \mathbb{R}$$

2.3. $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$

$\Leftrightarrow -8x + 2x - 4y + 4z + 16 - 1 - 4 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -6x - 4y + 4z + 7 = 0$

2.4. Seja M o ponto médio do segmento de reta [*AB*]:

$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$

$M(2, 3, 0)$

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

O raio da superfície esférica de diâmetro [*AB*] é igual a $\sqrt{13}$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13$ define a superfície esférica de diâmetro [*AB*].

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (y-3)^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ Circunferência de centro (0,3,0) e raio 3.

$P_{\text{circunferência}} = 2\pi \times r = 2\pi \times 3 = 6\pi$

O perímetro da interseção da superfície esférica com o plano yOz é igual a 6π.

3. Opção (D)

$h\left(-\frac{1}{2}\right) < h\left(\frac{1}{2}\right)$, logo h não é decrescente no seu domínio.

$D_h =]-1,1[, D'_h =]-1,1[$, h é decrescente em $]-1,0[$ e em $]0,1[$ e $h(0)$ não é extremo, logo h não tem extremos.

O gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo Oy, logo h não é par.

4. Opção (C)

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0 \wedge f\left(\frac{1}{2}x\right) \neq 0\right\}$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \ \vee \ x = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \ \vee \ \frac{1}{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = 8$$

$$D_g = \{x \in \mathrm{IR}: (x \geq 4 \ \vee \ x = -2) \ \wedge \ (x \neq -4 \ \wedge \ x \neq 8)\} \ = \{-2\} \cup [4,8[\cup]8,+\infty[$$

5. Opção (A)

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo as seguintes transformações sucessivas:

- translação horizontal associada ao vetor $(-2,0)$;
- simetria em relação ao eixo Ox;
- translação vertical associada ao vetor $(0,-1)$.

6.

6.1. $D(\dots,0)$

$$0 = x + 6 \Leftrightarrow x = -6$$

$$D(-6,0)$$

$$C(-1,\dots)$$

$$y = -1 + 6 \Leftrightarrow y = 5$$

$$C(-1,5)$$

$$P(x,x+6), \quad -6 < x < -1$$

$$A_{[ABCP]} = \frac{\overline{AP} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} =$$

$$= \frac{x+6+5}{2} \times (-x-1) =$$

$$= \frac{x+11}{2} \times (-x-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \times (-x^2 - x - 11x - 11) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2}, -6 < x < -1$$

6.2. $A(x) > 8 \land -6 < x < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2} > 8 \ \land \ -6 < x < -1$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 11 > 16 \ \land \ -6 < x < -1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 27 > 0 \ \land \ -6 < x < -1$$

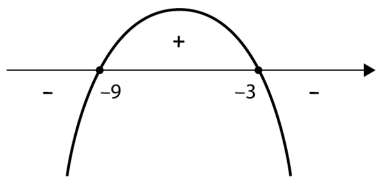
Cálculos auxiliares

$$-x^2 - 12x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times (-1) \times (-27)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \ \lor \ x = -3$$



$$-x^2 - 12x - 27 > 0 \ \land \ -6 < x < -1 \Leftrightarrow -9 < x < -3 \ \land \ -6 < x < -1$$

$$\Leftrightarrow -6 < x < -3$$

C.S. = $]-6, -3[$

7. Opção (B)

- Para $x \in [-5, -2[$:

  $f(x) = a(x+3)^2 + 4$

  Como $f(-4) = 2$, então:

  $a(-4+3)^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$

  $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$

- Para $x \in]-2, 2]$:

  $f(x) = mx + b$

  $m = \dfrac{6-3}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

  $f(x) = x + b$

  Como $f(-1) = 3$, então:

  $3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$

  $f(x) = x + 4$

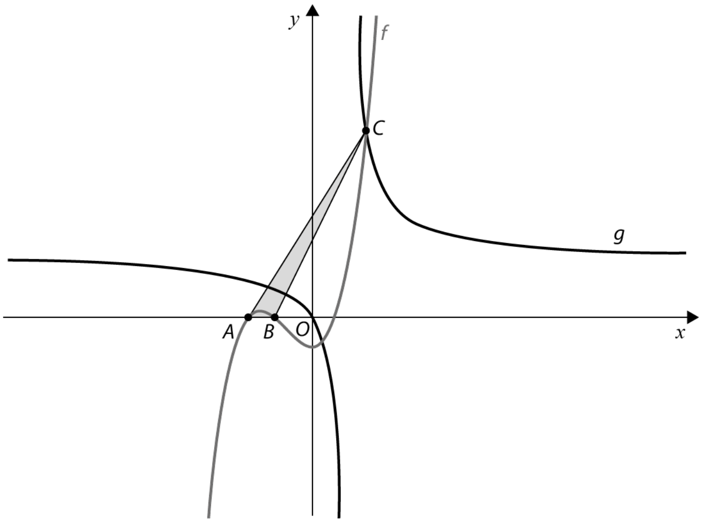
- Para $x \in [2, 4[$: $f(x) = 6$

  Logo:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < 2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } \ 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

8. Representemos graficamente, com recurso à calculadora gráfica, as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{-2x}{1-x}$$



$A(-1{,}62; 0)$ $\quad$ $B(-1; 0)$ $\quad$ $C(1{,}46; 6{,}36)$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \text{ordenada de } C}{2} = \frac{0{,}62 \times 6{,}36}{2} \approx$ 1,97 u.a.