Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$P(a) = P(-2a)$

$5a^2 + a + 2023 = 5 \times (-2a)^2 + (-2a) + 2023$

$\Leftrightarrow 5a^2 + a = 20a^2 - 2a$

$\Leftrightarrow -15a^2 + 3a = 0$

$\Leftrightarrow a(-15a + 3) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ -15a + 3 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = \frac{3}{15}$

Como $a \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$, então $a = \frac{1}{5}$.

2.

2.1. $A(x) = \frac{\overline{AB}+\overline{QP}}{2} \times \overline{AQ} =$

$= \frac{7 + (9 - x)}{2} \times (x - 2) =$

$= \left(\frac{16}{2} - \frac{x}{2}\right) \times (x - 2) =$

$= 8x - 16 - \frac{x^2}{2} + x =$

$= -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$ c.q.d.

Cálculo auxiliar

$A(2, 10)$

$B(2, 3)$ $\quad y_B = 2 + 1 = 3$

$Q(x, 10)$

$P(x, x + 1)$

Assim:

$\overline{AB} = 10 - 3 = 7$

$\overline{QP} = 10 - (x + 1) = 9 - x$

$\overline{AQ} = x - 2$

2.2. Pretende-se os valores de $x \in]2, 9[$ tais que:

$A(x) > 12$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 > 12$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 9x - 28 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 18x - 56 > 0$

Assim, os valores de x que satisfazem o pretendido são os valores de x que pertencem ao conjunto $]4, 14[\cap]2, 9[$, isto é, $x \in]4, 9[$.

Cálculo auxiliar

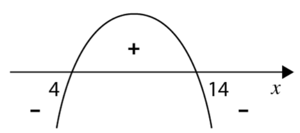
$-x^2 + 18x - 56 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times (-1) \times (-56)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{100}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18+10}{-2} \ \vee \ x = \frac{-18-10}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 4 \ \vee \ x = 14$



2.3. Opção (B)

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 = -\frac{1}{2}(x^2 - 18x) - 16 =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2 - 9^2) - 16 =$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2) - 9^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 16 =$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + \frac{81}{2} - 16 =$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + \frac{49}{2}$$

Assim, $a = -\frac{1}{2}$, $h = 9$ e $k = \frac{49}{2}$.

3.

3.1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 2^2 + 2^2$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

A circunferência tem centro (2, 2) e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3.2. Opção (D)

Como a reta *AB* é paralela à bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$) tem o mesmo declive, ou seja, -1. Assim, um vetor diretor da reta *AB* é o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (1, −1), o que exclui as opções (A) e (C), pois não apresentam na respetiva equação vetorial um vetor diretor colinear com $\vec{u}$.

Como a reta *AB* passa pelo centro da circunferência, ponto de coordenadas (2, 2), verifiquemos se o ponto pertence às retas cujas equações se encontram nas opções (B) e (D):

$$(2,2) = (3,3) + k(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Condição impossível, logo o ponto de coordenadas (2, 2) não pertence a esta reta, o que exclui a opção (B).

$$(2,2) = (1,3) + k(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

O ponto de coordenadas (2, 2) pertence a esta reta, logo a opção verdadeira é a (D).

3.3. Os vértices do quadrado são os pontos $O(0,0)$, A, B e C.

- O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Oy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \ \wedge \ x = 0$$

$$\Leftrightarrow 0^2 + y^2 - 0 - 4y = 0 \ \wedge \ x = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y - 4) = 0 \ \wedge \ x = 0$$

$$\Leftrightarrow (y = 0 \ \vee \ y = 4) \ \wedge \ x = 0$$

Assim, $A(0,4)$.

- O ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox:

  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \ \wedge \ y = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 + 0^2 - 4x - 0 = 0 \ \wedge \ y = 0$

  $\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \ \wedge \ y = 0$

  $\Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 4) \ \wedge \ y = 0$

  Assim, $B(4, 0)$.

- O ponto C tem a mesma abcissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A, logo as coordenadas de C são (4, 4).

3.4.

Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 4$

Equação reduzida da reta DE: $y = -x + 6$

A condição que define a região a sombreado, incluindo a fronteira, é:

$(y \leq -x + 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (y \geq -x + 6 \ \wedge \ x \leq 4 \ \wedge \ y \leq 4)$

> **Cálculo auxiliar**
>
> *D* é o ponto médio de [*AC*], logo as coordenadas de *D* são (2, 4).
>
> Assim:
>
> $y = -x + b$
>
> e $4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 6$

4.

4.1. Opção (A)

A reta AE pode ser definida pela condição $x = 3 \ \wedge \ y = 0$.

Assim, para que $P(k^2 + 2k, k^2 + 3k, -13)$ pertença à reta AE, tem que:

$k^2 + 2k = 3 \ \wedge \ k^2 + 3k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \ \wedge \ k(k+3) = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \ \wedge \ (k = 0 \ \vee \ k + 3 = 0)$

$\Leftrightarrow (k = 1 \ \vee \ k = -3) \ \wedge \ (k = 0 \ \vee \ k = -3)$

$\Leftrightarrow k = -3$

4.2.

- Equação da esfera centrada na origem e raio $\|\overrightarrow{AG}\|$: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $A(3, 0, 0)$
>
> $G(-3, 0, 8)$
>
> $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36 + 64} =$
>
> $= \sqrt{100} =$
>
> $= 10$

- Equação do plano α (plano mediador de $[BF]$): $z = 4$

- Interseção da esfera com o plano α:

  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \ \wedge \ z = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4^2 \leq 100 \ \wedge \ z = 4$

  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 84 \ \wedge \ z = 4$

  Círculo de raio $\sqrt{84}$.

A área da interseção da esfera com o plano α é:

$A = \pi \times \left(\sqrt{84}\right)^2 = 84\pi$

5.

5.1. Opção (B)

$(f \circ g)(3) + \underbrace{g^{-1}(3)}_{0 \ (*)} = f\big(g(3)\big) + 0 = f(-1) =$

$= 1^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + 13 \times (-1) - 6 =$

$= -24$

(*) Se (0, 3) ∈ gráf. g, então (3, 0) ∈ gráf. g^{-1}.

5.2. $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-1)(x-1)(x^2 + x - 6) =$

$= (x-1)^2(x-2)(x+3)$

Cálculos auxiliares

	1	−1	−7	13	−6
1		1	0	−7	6
	1	0	−7	6	0
1		1	1	−6	
	1	1	−6	0	

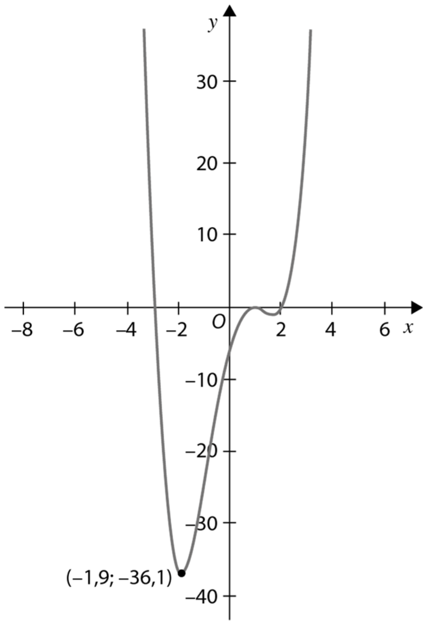
$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -3$

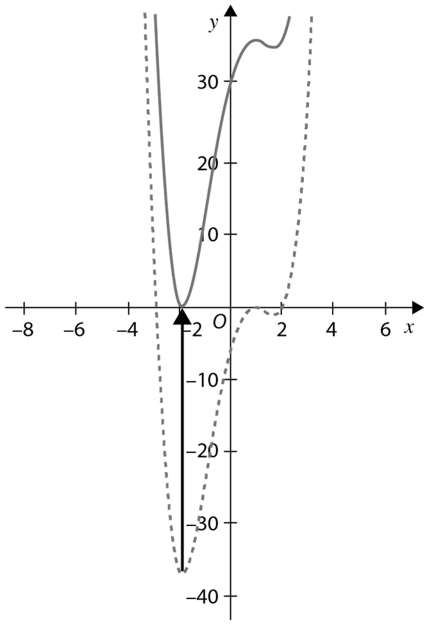
x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

Assim, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-3, 1\right[\cup \left]1, 2\right[$.

5.3.



Para que a função $f(x) + k$ tenha apenas um zero, o gráfico de f terá de sofrer uma translação associada ao vetor (0, k), onde k é o valor em módulo do mínimo absoluto de f.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se, com aproximação às décimas, $k \approx 36{,}1$.