Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (A)

I. Afirmação verdadeira.

(1, −1) é um vetor diretor da reta AB, logo o seu declive é $\frac{-1}{1} = -1$, que é igual ao declive da bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$).

II. Afirmação falsa.

Para que o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{32}, 10\right)$ seja um ponto da reta AB, tem de existir $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left(\sqrt{32}, 10\right) = \left(2\sqrt{2}, 5\right) + k(-1, 1) \Leftrightarrow \left(4\sqrt{2}, 10\right) = \left(2\sqrt{2} - k, 5 + k\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - k \ \wedge \ 10 = 5 + k$$

$$\Leftrightarrow k = -2\sqrt{2} \ \wedge \ k = 5$$ Condição impossível.

Logo, o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{32}, 10\right)$ não é um ponto da reta AB.

1.2. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 6y + 3^2 = -9 + 2^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Equação de uma circunferência de centro (2, 3) e raio 2.

1.3. A reta CD é paralela à reta AB, logo têm declives iguais. Assim, a equação reduzida da reta CD é da forma $y = -x + b,\ b \in \mathbb{R}$.

Como C, centro da circunferência, tem coordenadas (2, 3) e pertence à reta CD, vem que:

$$3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Assim, a equação reduzida da reta CD é $y = -x + 5$.

1.4.

- Condição que define o exterior do círculo: $(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4$
- Equação reduzida da reta CD: $y = -x + 5$
- Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 5 + 2\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar

$y = -x + b$ e $\left(2\sqrt{2}, 5\right) \in AB$

Logo:

$5 = -2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow b = 5 + 2\sqrt{2}$

- Equação reduzida da reta EG: $y = 3 - \sqrt{2}$

Cálculo auxiliar
O ponto *E* é um dos pontos da interseção da circunferência com a reta CD:
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \ \wedge \ y = -x + 5$$
Assim:
$(x-2)^2 + (-x+5-3)^2 = 4 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$
$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2}$
Como o ponto E é o ponto de interseção com maior abcissa, vem que $x = 2 + \sqrt{2}$. Logo:
$y = -(2+\sqrt{2}) + 5 \Leftrightarrow y = 3 - \sqrt{2}$

Condição que define a região a sombreado, incluindo a fronteira:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \ \wedge \ y \leq -x + 5 + 2\sqrt{2} \ \wedge \ y \geq -x + 5 \ \wedge \ y \geq 3 - \sqrt{2} \ \wedge \ x \geq 0$$

2.

2.1. $O(0, 0, 0)$ $\qquad$ $R(0, 5, -5)$

Seja C o centro da superfície esférica. Então, C é o ponto médio de $[OR]$:

$C = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0-5}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

raio $= \frac{\overline{OR}}{2} = \frac{\sqrt{(0-0)^2+(5-0)^2+(-5-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

Condição da superfície esférica pretendida:

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

2.2. Opção (D)

Uma reta é paralela ao eixo das cotas, se o vetor diretor dessa reta for colinear com o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$.

Se uma reta é paralela ao eixo das cotas e passa pelo ponto P, então também passa pelo ponto Q de coordenadas $(5, 0, -5)$.

2.3. Sendo V o vértice da pirâmide, as coordenadas de V são da forma $\left(\frac{5}{2}, \ y, -\frac{5}{2}\right), y < 0$.

Seja h a altura da pirâmide.

Volume do sólido = Volume da pirâmide + Volume do cubo

$$150 = \frac{1}{3} \times 5^2 \times h + 5^3$$

$$\Leftrightarrow 150 = \frac{25}{3}h + 125$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{3}h = 25$$

$$\Leftrightarrow h = 3$$

Assim, $V\left(\frac{5}{2}, -3, -\frac{5}{2}\right)$.

3. Opção (B)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,1) - (1,2,-2) = (1,-1,3)$

$\vec{u} = (a, b, -1)$

Para que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares tem de se verificar $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{-1}{3}$, ou seja, $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

4.

4.1. Opção (B)

O gráfico da função f sofre uma translação associada ao vetor de coordenadas $(2,0)$, seguida de uma translação associada ao vetor $(0,1)$.

4.2. Em $[-4,0]$:

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, onde o ponto de coordenadas (h,k) representa o vértice da parábola, neste caso, $(-2,\ 4)$.

Temos que $f(x) = a(x+2)^2 + 4$.

Como $(-4,\ 0)$ é um ponto da parábola, então:

$0 = a(-4+2)^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = a \times 4 + 4 \Leftrightarrow a = -1$

Assim, $f(x) = -(x+2)^2 + 4$, para $x \in [-4,0]$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 4 & se \quad -4 \leq x \leq 0 \\ 0 & se \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

4.3. A expressão analítica da função h é do tipo $y = mx + b$, onde $m = \frac{3-1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$.

$(2,1) \in$ gráfico de $h \wedge y = -2x + b$.

Então:

$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$

Assim, $h(x) = -2x + 5$.

Quadro de sinal da função j:

$D_f = [-4, 4[$

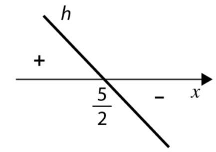
$D_h = \mathbb{R}$

$D_j = [-4, 4[$

x	-4		$\frac{5}{2}$		4
Sinal de $-f(x) - 1$	–	–	–	–	n.d.
Sinal de $h(x)$	+	+	0	–	n.d.
Sinal de $j(x) = (-f(x) - 1) \times h(x)$	–	–	0	+	n.d.

Cálculo auxiliar

$h(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$



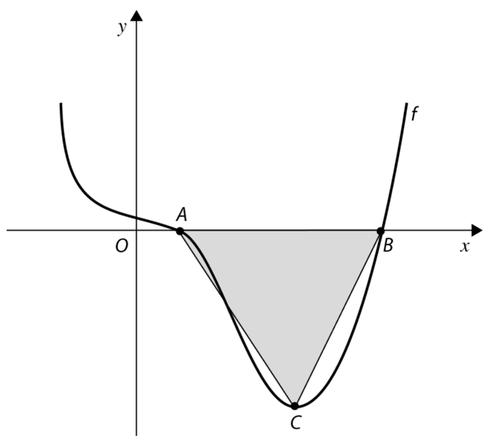
A função j é negativa em $\left[-4, \frac{5}{2}\right[$ e é positiva em $\left]\frac{5}{2}, 4\right[$.

5. Opção (C)

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\} =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$

6. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3$

Janela utilizada: $[-5, 5] \times [-40, 40]$



$A\ (1{,}13; 0)$

$B\ (4{,}53; 0)$

$C\ (3{,}46; -36{,}85)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |y_C|}{2} = \frac{3{,}4 \times 36{,}85}{2} \approx 62{,}6$$