TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

- O centro da superfície esférica é o ponto médio de [*AB*]. Assim, as suas coordenadas são:

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2},\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{12}}{2},\frac{\sqrt{5}+0}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},2\sqrt{3},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

  A proposição p é, então, verdadeira.

- O raio da superfície esférica é $\frac{d(A,B)}{2}$.

$$d(A,B)=\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{12}-2\sqrt{3})^2+(0-\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt{2+0+5}=$$

$$=\sqrt{7}=$$

$$=7^{\frac{1}{2}}$$

  Assim, o raio é $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{2}$.

  A proposição q é, então, falsa.

  Nas opções apresentadas, tem-se que:

  (A) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

  (B) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

  (C) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

  (D) $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

  Assim, a opção correta é a (D).

2. Opção (B)

$A=\{x\in\mathbb{R}: -2<x<3\}=]-2,3[$

$B=\{x\in\mathbb{R}: (x-2)(x+2)\geq x^2+2x\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\geq x^2+2x\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: 2x\leq -4\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\leq -2\}=$

$=]-\infty,-2]$

- $\overline{A} \cup \overline{B} = (\,]-\infty,-2] \cup [3,+\infty[\,) \cup]-2,+\infty[= \mathbb{R}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{]-2,3[\cup]-\infty,-2]} = \overline{]-\infty,3[} = [3,+\infty[$
- $A \backslash B =]-2,3[\backslash]-\infty,-2] =]-2,3[$
- $B \cap \overline{A} =]-\infty,-2] \cap (\,]-\infty,-2] \cup [3,+\infty[\,) =]-\infty,-2]$

3.

3.1. A mediatriz de [*AB*] é o conjunto dos pontos $P(x,y)$ do plano tais que $d(P,A) = d(P,B)$.

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow x^2+10x+25+y^2-4y+4 = x^2+y^2-6y+9$$
$$\Leftrightarrow 2y = -10x-20$$
$$\Leftrightarrow y = -5x-10$$

A equação reduzida da mediatriz de [*AB*] é $y = -5x-10$. O declive desta reta é -5.

Um vetor diretor da reta r tem coordenadas $(-5,1)$. Logo, o declive da reta r é $-\frac{1}{5}$.

As retas em causa têm declives diferentes, logo não são paralelas.

A proposição tem valor lógico falso.

3.2. $C = B + 2\overrightarrow{BA} = (0,3) + 2(-5,-1) = (-10,1)$

Com centro no ponto de coordenadas $(-10,1)$, para ser tangente ao eixo das ordenadas, o raio é 10.

Assim, a equação da circunferência pretendida é:

$$(x+10)^2 + (y-1)^2 = 100$$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{BA} = A - B =$
$= (-5,2) + (0,3) =$
$= (-5,-1)$

3.3.

3.3.1. $d(A,D) = \sqrt{37} \Leftrightarrow \sqrt{(p+5)^2+(3-2)^2} = \sqrt{37}$

$$\Leftrightarrow (p+5)^2 + 1 = 37$$
$$\Leftrightarrow (p+5)^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow p+5 = 6 \;\vee\; p+5 = -6$$
$$\Leftrightarrow p = 1 \;\vee\; p = -11$$

$$\{p \in \mathbb{N}:\ d(A,D) = \sqrt{37}\} = \{1\}$$

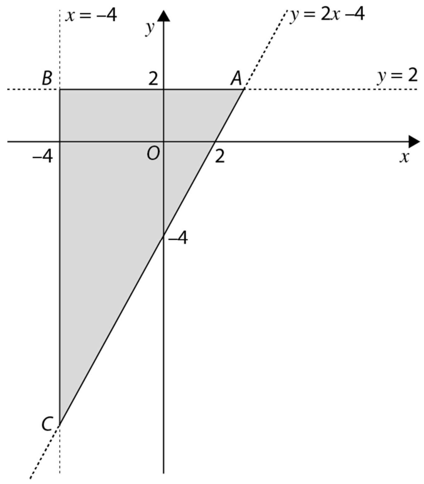
3.3.2. Para que $D(p,3)$ pertença a r, terá de se verificar $(p,3) = \left(1,\frac{1}{2}\right) + k(-5,1)$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Assim, terá que:

$$\begin{cases} p = 1 - 5k \\ 3 = \frac{1}{2} + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 - 5 \times \frac{5}{2} \\ k = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{23}{2} \\ k = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\{p \in \mathbb{R}:\ D \in r\} = \left\{-\frac{23}{2}\right\}$$

4. $2x - y \leq 4 \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ 2 - y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq -2x + 4 \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ -y \geq -2$

$$\Leftrightarrow y \geq 2x - 4 \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ y \leq 2$$



Sejam A, B e C os vértices do triângulo representado na figura:

- A é o ponto de interseção das retas definidas por $y = 2$ e $y = 2x - 4$:
  $A(x,2)$, com $2 = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$
  Assim, $A(3,2)$.
- B é o ponto de interseção das retas definidas por $x = -4$ e $y = 2$. Logo, $B(-4,2)$.
- C é o ponto de interseção das retas definidas por $x = -4$ e $y = 2x - 4$:
  $C(-4,y)$, com $y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 2 \times (-4) - 4 \Leftrightarrow y = -12$
  Assim, $C(-4,-12)$.

Área $= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{|3-(-4)| \times |2-(-12)|}{2} =$

$= \frac{7 \times 14}{2} =$

$= 49$ u.a.

5.

5.1. Opção (C)

Por observação da figura, e porque o ponto D tem coordenadas (0, 4, 0) e o cubo tem aresta 3, tem-se que o ponto de coordenadas (3, 4, 0) é o ponto A e o ponto de coordenadas (0, 7, 0) é o ponto *C*.

Note-se que ABC não é o plano mediador de $[AC]$, uma vez que A não é equidistante de A e C. ACE também não é o plano mediador de $[AC]$, uma vez que $d(E,A)$ é diferente de $d(E,C)$. O plano BCI não é o plano mediador de $[AC]$, pois C não é equidistante de A e de C.

Cada um dos pontos B, D e F é equidistante dos pontos A e C.

Portanto, o plano mediador de [*AC*] é o plano *BDF*.

5.2. $I\left(\frac{3}{2}, 4+\frac{3}{2}, 3+\frac{4}{\sqrt{5}-1}\right)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)$

$\overrightarrow{AG} = G - A = (0,7,3) - (3,4,0) = (-3,3,3)$

Uma equação vetorial da reta que passa no vértice da pirâmide e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AG}$ é:

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) + k(-3,3,3), k \in \mathbb{R}$$

5.3.

5.3.1. $y = 4 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}$

5.3.2. $x = 0 \quad \wedge \quad z = 3$

5.3.3. $F(3,7,3)$

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 \leq 4$$

5.4. $\text{Volume}_{\text{sólido}} = \text{Volume}_{\text{cubo}} + \text{Volume}_{\text{pirâmide}} =$

$$= 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= 27 + 3 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= 27 + \frac{12(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$$

$$= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$$

$$= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{4} =$$

$$= 27 + 3\sqrt{5} + 3 =$$

$$= 30 + 3\sqrt{5}$$

6. Opção (B)

$$x < 0 \ \wedge \ y > 0 \ \wedge \ y < -x \ \wedge \ x \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \ \wedge \ 0 < y < -x$$

7. Opção (D)

Seja V o volume, d a diagonal espacial e a a aresta do cubo.

$$V = a^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{d}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^3 =$$

$$= d^3 \times 3^{-\frac{3}{2}}$$

Cálculo auxiliar

$$d = \sqrt{3}a \Leftrightarrow a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$