Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1. $(3+\sqrt{2})x^2+(2-\sqrt{2})x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(2-\sqrt{2})\pm\sqrt{(2-\sqrt{2})^2-4\times(3+\sqrt{2})\times(-1)}}{2(3+\sqrt{2})}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4-4\sqrt{2}+2+4(3+\sqrt{2})}}{6+2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4-4\sqrt{2}+2+12+4\sqrt{2}}}{6+2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{6+2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}} \lor x=\frac{-2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+4\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}} \lor x=\underbrace{\frac{-2-2\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}}}_{\in \mathrm{IR}^-}$$

Como $x \in \mathrm{IR}^+$, então:

$$x=\frac{-2+4\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{(-2+4\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})}{36-8} \Leftrightarrow x=\frac{-12+4\sqrt{2}+24\sqrt{2}-16}{28}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-28+28\sqrt{2}}{28}$$

$$\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}$$

2. Opção (C)

$A+2\overrightarrow{GR}=A+\overrightarrow{AM}=M$, logo a proposição $A+2\overrightarrow{GR}=S$ é falsa.

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{TV}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$, logo a proposição $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{TV}=\overrightarrow{CA}$ é falsa.

$S-2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{DI}=S+2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{ID}=S+\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{ID}=I+\overrightarrow{ID}=D$, logo a proposição $S-2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{DI}=D$ é verdadeira.

3. Opção (D)

Sabemos que a circunferência de maior raio é definida por $(x-3)^2+y^2=9$.

A circunferência de menor raio é definida por $(x-3)^2+y^2=1$. A reta vertical tangente à circunferência de menor raio é definida por $x=2$.

A condição $(x-3)^2+y^2\leq 9 \;\land\; x<2 \;\land y>0$ define a interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas (3,0) e raio 3 com o semiplano aberto à esquerda da reta vertical definida por $x=2$ e com o semiplano aberto superior à reta horizontal definida por $y=0$.

A condição $1\leq(x-3)^2+y^2\leq 9 \land x>2 \land y<0$ define a interseção da coroa circular de centro no ponto de coordenadas (3,0) e raio 3 da circunferência externa e raio 1 da circunferência interna com o semiplano aberto à direita da reta vertical definida por $x=2$ e com o semiplano aberto inferior à reta horizontal definida por $y=0$.

Assim, a condição pedida é:

$$((x-3)^2+y^2 \leq 9 \ \wedge \ x<2 \ \wedge \ y>0) \ \vee \ (1 \leq (x-3)^2+y^2 \leq 9 \ \wedge \ x>2 \ \wedge \ y<0)$$

4.

4.1. $C = D + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB} = k(4,2), k \in \text{IR} = (4k, 2k), k \in \text{IR}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (6,4)-(2,2) = (4,2)$

$$\|\overrightarrow{DC}\| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{45} \Leftrightarrow \sqrt{16k^2+4k^2} = \sqrt{45}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20k^2} = \sqrt{45}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20} \times |k| = \sqrt{45}$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$$

$$\Leftrightarrow |k| = \sqrt{\frac{45}{20}}$$

$$\Leftrightarrow |k| = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \ \vee \ k = -\frac{3}{2}$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm o mesmo sentido, $k = \frac{3}{2}$.

$$\overrightarrow{DC} = \left(4 \times \frac{3}{2}, 2 \times \frac{3}{2}\right) = (6,3)$$

$$C = D + \overrightarrow{DC} = (1,-2)+(6,3) = (7,1)$$

4.2. $P(x, x^2)$

$$d(P,A) = d(P,D) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(x^2-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(x^2+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2+(x^2-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2+(x^2+2)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+x^4-4x^2+4 = x^2-2x+1+x^4+4x^2+4$$

$$\Leftrightarrow -4x^2-4x^2-4x+2x+4-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x^2-2x+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\times(-8)\times 3}}{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 10}{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{3}{4}$$

Dado que P pertence ao 2.º quadrante, a sua abcissa é negativa.

Como $x < 0$, então $x = -\frac{3}{4}$.

Logo, $P\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$.

4.3. Opção (C)

$r: y = mx + b$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (1, -2) - (2, 2) = (-1, -4)$

$y = 4x + b$ $\qquad\qquad$ $m_{AD} = \frac{-4}{-1} = 4$

Como B pertence a reta:

$4 = 4 \times 6 + b \Leftrightarrow 4 = 24 + b \Leftrightarrow 4 - 24 = b \Leftrightarrow -20 = b$

$y = 4x - 20$

$Q(a, 0)$

$0 = 4a - 20 \Leftrightarrow 4a = 20 \Leftrightarrow a = 5$

$Q(5, 0)$

$R(0, b)$, logo $R(0, -20)$,

$A_{[OQR]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{OR}}{2} = \frac{5 \times 20}{2} = 50$

4.4. Coordenadas do ponto médio do segmento de reta [*AS*]:

$\left(\frac{2+k^2+1}{2}, \frac{2+2k}{2}\right) = \left(\frac{k^2+3}{2}, k + 1\right)$

$\frac{k^2+3}{2} = 6 \ \wedge \ k + 1 = 4 \Leftrightarrow k^2 + 3 = 12 \ \wedge \ k = 3$

$\Leftrightarrow k^2 + 3 = 12 \ \wedge \ k = 3$

$\Leftrightarrow k^2 = 9 \ \wedge \ k = 3$

$\Leftrightarrow (k = 3 \ \vee \ k = -3) \ \wedge \ k = 3$

$\Leftrightarrow k = 3$

5. Opção (C)

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 25 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + 9 \leq 25 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

Esta condição define o círculo de centro em (2, 0, 0) e raio 4 contido no plano $z = 0$.

Logo, a sua área é igual a $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

6.

6.1. Opção (B)

$D(-3, 0, 4)$ $\qquad\qquad$ $C = D + \overrightarrow{AB}$

$(x, y, z) = (-3, 0, 4) + k(-1, 0, -3), k \in [0,1]$

6.2. $A(0, 0, a)$ e $B(b, 0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3) \Leftrightarrow (b, 0, 0) - (0, 0, a) = (-1, 0, -3) \Leftrightarrow (b, 0, -a) = (-1, 0, -3)$

$\Leftrightarrow b = -1 \ \wedge \ a = 3$

$A(0, 0, 3)$ e $B(-1, 0, 0)$

6.3. Como se trata de uma pirâmide quadrangular regular, a projeção ortogonal de E sobre o plano ABC é o ponto médio do segmento de reta $[BD]$. Logo, a abcissa e a cota de E são iguais à abcissa e à cota do ponto médio do segmento de reta $[BD]$. Seja M o ponto médio de $[BD]$:

$M\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-2, 0, -2)$

Logo, $E(-2, y, 2)$.

$V_{\text{pirâmide}} = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \times h = 30 \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}\right)^2 h = 90 \Leftrightarrow h = 9$

Então, $E(-2, -9, 2)$.

6.4. O centro da superfície esférica admite como centro o ponto médio do segmento de reta $[BD]$:

$\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-2, 0, 2)$

Sabemos que o raio é igual a $\frac{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}{2}$.

$\overrightarrow{BD} = D - B = (-3, 0, 4) - (-1, 0, 0) = (-2, 0, 4)$

$\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$r = \frac{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Logo, a equação pedida é:

$$(x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$$

6.5. O plano BED é o plano mediador do segmento de reta $[AC]$.

$C = D + \overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4) + (-1, 0, -3) = (-4, 0, 1)$

$(x+4)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9$

$\Leftrightarrow 8x - 2z + 6z + 16 + 1 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 8x + 4z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + z + 2 = 0$