Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

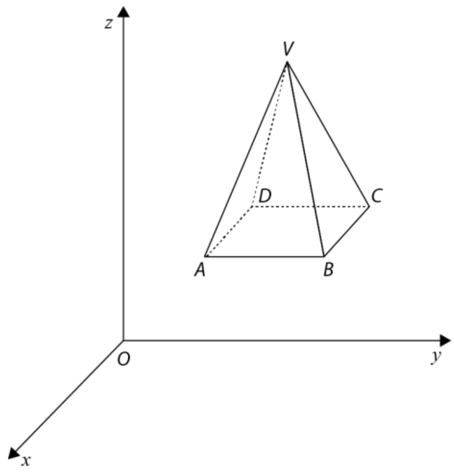
Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$;
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$;
- a altura da pirâmide é 3.

1.1. Qual das seguintes condições define a reta BC?

(A) $y = 1 \wedge z = 1$ **(B)** $x = -3 \wedge y = 3$

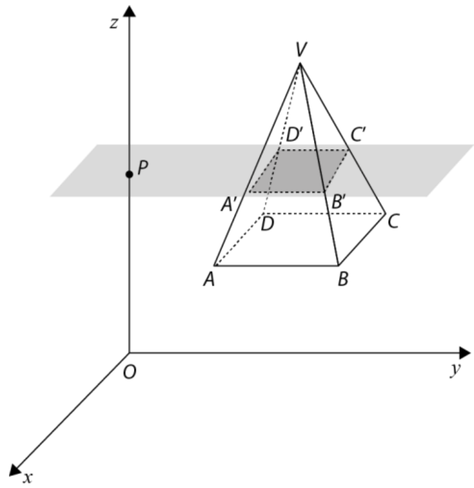
(C) $x = -3 \wedge z = 1$ **(D)** $y = 3 \wedge z = 1$

1.2. Seja M o ponto médio de $[VC]$.

Escreva uma equação vetorial da reta paralela à reta AC e que passa em M.

1.3. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$, colinear com $\overrightarrow{AC}$, de sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}$ e de norma igual a $\|\overrightarrow{AB}\|$.

1.4. Considere um ponto P de coordenadas $(0, 0, z)$, $z \in [1, 4[$.



Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém o ponto P e é paralelo ao plano xOy.

Sejam A', B', C' e D' os pontos de interseção deste plano com as arestas da pirâmide $[AV]$, $[BV]$, $[CV]$ e $[DV]$, respetivamente.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine as coordenadas do ponto P, para as quais o volume da pirâmide $[A'B'C'D'V]$ é igual a metade do volume da pirâmide $[ABCDV]$.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- apresente o valor da cota de P com arredondamento às milésimas.

2. Considere a função polinomial f, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 10x + 7$.

2.1. Sabe-se que a função f tem um zero, a, um mínimo relativo, b, e um máximo relativo, c.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $a \approx 3{,}98 \quad \wedge \quad b \approx -0{,}70 \quad \wedge \quad c \approx 2{,}37$

(B) $a \approx 3{,}98 \quad \wedge \quad b \approx 3{,}14 \quad \wedge \quad c \approx 32{,}16$

(C) $a = 0 \quad \wedge \quad b \approx -0{,}70 \quad \wedge \quad c \approx 2{,}37$

(D) $a = 0 \quad \wedge \quad b \approx 3{,}14 \quad \wedge \quad c \approx 32{,}16$

2.2. Considere, em $\mathbb{R}$, o polinómio $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 10x + 7$, que define analiticamente a função f. Determine os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, de modo que $P(x)$ seja escrito na forma $P(x) = (x^2 - 1) \times Q(x) + R(x)$.

2.3. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, os valores de x que verificam a condição em $P(x) > 7$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	
8	14	16	20	8	14	20	**100**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

3. O domínio da função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{x^2-16}$ é:

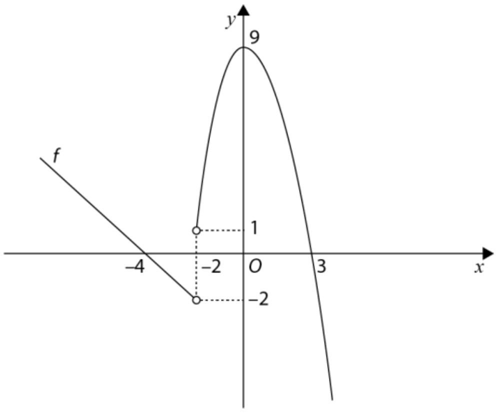
(A) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ **(B)** $]-\infty, 3]$ **(C)** $]-\infty, 3] \setminus \{-4\}$ **(D)** $[3, +\infty[\setminus \{4\}$

4. Considere, num referencial o.n. Oxy, a região definida pela condição:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y \leq -2 \quad \wedge \quad y \geq x$$

Represente no plano a região considerada e determine a sua área.

5. Na figura está representada graficamente a função real de variável real f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sabe-se que o gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas -4 e 3.



5.1. Considere a função g definida por $g(x) = -f(x+2)$.

Indique, justificando, quais são os zeros de g.

5.2. Considere a função h definida por $h(x) = f(-x) + 1$.

Em qual das opções se encontra o quadro de variação da função h?

(A)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Variação de h	$\searrow$	n. d.	$\nearrow$	9	$\searrow$

(B)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Variação de h	$\nearrow$	n. d.	$\searrow$	-9	$\nearrow$

(C)

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Variação de h	$\nearrow$	9	$\searrow$	n. d.	$\nearrow$

(D)

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Variação de h	$\nearrow$	10	$\searrow$	n. d.	$\nearrow$

5.3. Seja m a função definida por $m(x) = 2x - 5$.

Calcule o valor de $(m \circ f)(-4) + m^{-1}(7)$.

6. Considere um retângulo de lados c e l. Sabe-se que este retângulo tem 4 unidades de área e $l = \sqrt{5} - 1$ unidades de comprimento.

Qual é o valor de c?

(A) $5^{\frac{1}{2}} + 1$ **(B)** $6^{\frac{3}{2}}$ **(C)** $\frac{5^{\frac{1}{2}} - 1}{4}$ **(D)** $5^{\frac{1}{2}}$

7. Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$.

Considere as seguintes proposições:

p: "A função f é crescente em $[2, +\infty[$."

q: "A função f é negativa em $]-1, 5[$."

r: "O eixo de simetria da parábola que representa a função f é a reta de equação $x = -18$."

Indique, justificando, o valor lógico da proposição $(\sim p \Rightarrow q) \vee r$.

8. Considere, para certos valores reais a, b e c, a função g definida por $g(x) = a|x - b| + c$.

Sabe-se que o contradomínio de g é $]-\infty, 4]$ e os zeros são -5 e 11.

Determine os valores de a, b e c.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
3.	**4.**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.**	**7.**	**8.**	
8	16	12	8	16	8	16	16	**100**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

Dadas as condições da figura e do enunciado, os pontos da reta *BC* têm ordenada 3 e cota 1.

Uma condição que define a reta *BC* é, então, $y = 3 \ \wedge \ z = 1$.

1.2. $V(-2,2,4)$

$C(-3,3,1)$

$M = \left(\frac{-2+(-3)}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-2,2,0)$

Uma equação vetorial da reta paralela à reta *AC* e que passa em *M* é:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) + k(-2,2,0), k \in \mathbb{R}$$

1.3. $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, pois $[AB]$ é um dos lados do quadrado $[ABCD]$, que é a base da pirâmide.

$\vec{u} = k\overrightarrow{AC}, \ \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$= (-2, 2, 0) =$

$= (-2k, 2k, 0)$

Para que $\|\vec{u}\| = 2$, vem que:

$$\sqrt{(-2k)^2 + (2k)^2 + 0^2} = 2$$

Logo:

$4k^2 + 4k^2 = 4 \Leftrightarrow 8k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \ \vee \ \ k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para que $\vec{u}$ tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}, k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim:

$\vec{u} = \left(-2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0\right) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$

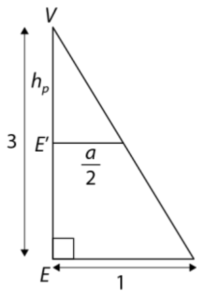
1.4. $V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 4$

$V_{[A'B'C'D'V]} = \frac{1}{3} \times a^2 \times h_p$, onde a é o lado do quadrado$[A'B'C'D']$ e h_p é a altura da pirâmide $[A'B'C'D'V]$, ambos em função de z, cota do ponto P.

Cálculo auxiliar

(1) $h_p = 4 - z$

(2)



O ponto *E* é o centro da base [*ABCD*] e E' é o centro da base $[A'B'C'D']$.

Como $\frac{1}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{h_p}$, vem que $a = \frac{2}{3}h_p$.

Logo, de (1), tem-se que $a = \frac{2}{3}(4 - z)$.

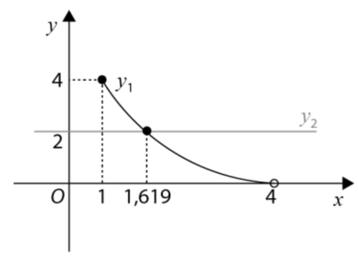
Assim, de (1) e de (2), vem que:

$$V_{[A'B'C'D'V]} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}(4 - z)\right)^2 \times (4 - z) = \frac{4}{27}(4 - z)^3$$

Pretende-se então o valor de z tal que $V_{[A'B'C'D'V]} = 2$.

Na calculadora gráfica:

$y_1 = \frac{4}{27}(4 - x)^3$ $\qquad$ $y_2 = 2$



z é então, aproximadamente, $1{,}619$ e as coordenadas do ponto *P* são (0; 0; 1,619).

2.

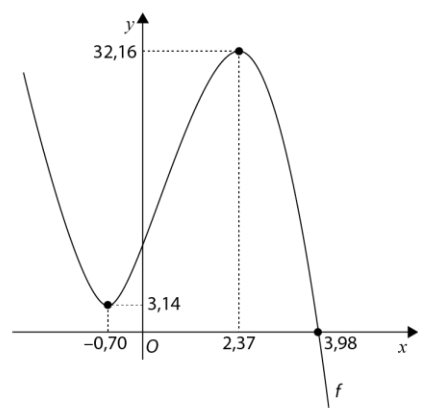
2.1. Opção (B)

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora e sabendo que a função f tem um zero (a), um mínimo relativo (b) e um máximo relativo (c), concluímos que:

$a \approx 3{,}98$

$b \approx 3{,}14$

$c \approx 32{,}16$



2.2.

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 + 5x^2 + 10x + 7 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} +2x^3 \qquad\quad - 2x \qquad\quad & -2x + 5 \\ \cline{1-1} 5x^2 + 8x + 7 & \\ -5x^2 \qquad\quad + 5 & \\ \cline{1-1} 8x + 12 & \end{array}$$

Temos, então, que $P(x) = (x^2 - 1) \times (-2x + 5) + (8x + 12)$.

Logo, $Q(x) = -2x + 5$ e $R(x) = 8x + 12$.

2.3. $P(x) > 7 \Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 10x + 7 > 7 \Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 10x > 0$

Cálculo auxiliar

$-2x^3 + 5x^2 + 10x = x(-2x^2 + 5x + 10)$

$-2x^2 + 5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-2)\times 10}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{105}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-5-\sqrt{105}}{-4} \ \vee\ \Leftrightarrow x = \frac{-5+\sqrt{105}}{-4}$

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{105}}{4}$		0		$\frac{5+\sqrt{105}}{4}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x^2 + 5x + 10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$-2x^3 + 5x^2 + 10x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{105}}{4}\right[\cup \left]0, \frac{5+\sqrt{105}}{4}\right[$$

Caderno 2

3. Opção (C)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -x + 3 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - 16 \neq 0\} =]-\infty, 3]\backslash\{-4\}$

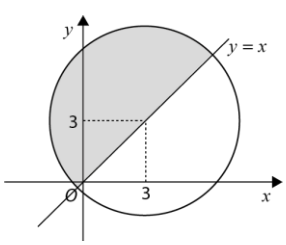
Cálculo auxiliar

$-x \geq -3 \ \wedge \ x^2 \neq 16 \Leftrightarrow x \leq 3 \ \wedge \ x \neq 4 \ \wedge \ x \neq -4$

4. $x^2 + y^2 - 6x - 6y \leq -2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 - 6y + 3^2 \leq -2 + 3^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 16$

A condição representa um círculo de centro no ponto de coordenadas $C(3,3)$ e raio $= \sqrt{16} = 4$.



$$A_{\text{sombreada}} = \frac{A_{\text{círculo}}}{2} = \frac{\pi\times 4^2}{2} = 8\pi \text{ u.a.}$$

5.

5.1. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma translação associada ao vetor $(-2, 0)$, seguida de uma reflexão segundo o eixo Ox.

Os zeros são, então, $-4 - 2 = -6$ e $3 - 2 = 1$, sendo que a reflexão segundo o eixo Ox não tem qualquer efeito nos zeros da função.

5.2. Opção (D)

O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por uma reflexão segundo o eixo Oy, seguida de uma translação associada ao vetor (0, 1).

5.3. $(m \circ f)(-4) = m(f(-4)) = m(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$

$m^{-1}(7) = 6$, pois $m(x) = 7 \Leftrightarrow 2x - 5 = 7 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$, isto é, $m(6) = 7$, logo $m^{-1}(7) = 6$.

Assim:

$(m \circ f)(-4) + m^{-1}(7) = -5 + 6 = 1$

6. Opção (A)

$c \times l = 4$

$c \times (\sqrt{5} - 1) = 4 \Leftrightarrow c = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$ e $\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$

$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$

$= \sqrt{5} + 1 =$

$= 5^{\frac{1}{2}} + 1$

7. Sabe-se que o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e com vértice no ponto de coordenadas $\left(-\frac{-8}{2\times 2}, f\left(-\frac{-8}{2\times 2}\right)\right) = (2, f(2)) = (2, -18)$.

Sabe-se também que f tem dois zeros: -1 e 5

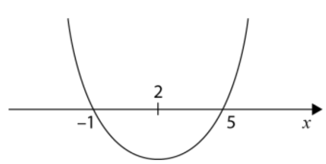
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times 1\times(-5)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \quad \vee \quad x = \frac{4-6}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -1$

Um esboço desta parábola é:



Logo:

- a função f é crescente em $[2, +\infty[$ e, por isso, p é uma proposição verdadeira;
- a função f é negativa em $]-1, 5[$ e, por isso, q é uma proposição verdadeira;
- o eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 2$, logo a proposição r é falsa.

Assim:

$((\sim p \Rightarrow q) \vee r) \Leftrightarrow ((\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

8. $g(x) = a|x - b| + c$

Como $D'_g =]-\infty, 4]$, tem-se que $a < 0$ e $c = 4$.

Como -5 e 11 são zeros de g e $|-5 - b| = |11 - b|$, então $b = \frac{-5+11}{2} = 3$.

Assim, $g(x) = a|x - 3| + 4$.

Como o ponto de coordenadas $(11, 0)$ pertence ao gráfico de g, vem que:

$0 = a|11 - 3| + 4 \Leftrightarrow 8a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.