**Teste de Matemática A**

2020 / 2021

Teste N.º 1

**Matemática A**

**12.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ________________________________________ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$ ($\alpha$ − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ − raio)

**Área de um polígono regular**: Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ − raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi\, r\, g$ ($r$ − raio da base;

$g$ − geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\,\pi\, r^2$ ($r$ − raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ ($r$ − raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

**Progressão geométrica:** $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

## Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n=\rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n\,e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta}=\sqrt[n]{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\,e^{i\theta}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$)

## Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u.v)'=u'.v+u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,.u^{n-1}.u'\ (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'.\cos u$

$(\cos u)'=-u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'.e^u$

$(a^u)'=u'.a^u.\ln a\ (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\,.\ln a}\ (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

## Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\ (p\in\mathbb{R})$

**1.** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus).

Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do dois ao dez).

**1.1.** Utilizando apenas as doze figuras, quantas sequências de doze cartas, com os reis todos juntos e as damas todas juntas, é possível construir?

**1.2.** Retirando ao acaso, simultaneamente, cinco cartas de um baralho completo, quantos conjuntos distintos de cinco cartas com, no máximo, dois ases é possível formar?

**1.3.** O André, o António, o Pedro e o Rodrigo vão escolher, cada um e em segredo, uma carta do naipe de paus completo.

Qual é a probabilidade de exatamente dois deles escolherem o rei de paus?

**(A)** $\frac{3}{65}$ **(B)** $\frac{144}{28\,561}$

**(C)** $\frac{792}{28\,561}$ **(D)** $\frac{864}{28\,561}$

**2.** Considere todos os números naturais de seis algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 2, dois algarismos 4 e um algarismo 5.

Determine quantos destes números são superiores a 220 000.

**3.** Uma determinada linha do triângulo de Pascal tem exatamente 13 elementos.

Escolhem-se ao acaso dois desses 13 elementos.

Qual é a probabilidade de se escolher dois números cuja soma seja igual a 13?

**(A)** $\frac{1}{39}$ **(B)** $\frac{2}{39}$

**(C)** $\frac{4}{39}$ **(D)** $0$

**4.** Considere o desenvolvimento de $(a+2x)^6$, com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em $x^3$ é igual a $-160$, determine o valor da constante $a$.

**5.** Seja $E$ o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória. Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos $(A \subset E \text{ e } B \subset E)$.

Sabe-se que:

• $P(A) = 0{,}3$

• $P(B) = 0{,}5$

• $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(\bar{B} | (A \cup B)\right)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**6.** Um saco contém nove cartões, numerados de 1 a 9 e indistinguíveis ao tato.

Retiraram-se todos os cartões do saco, um a um, e colocaram-se em fila numa mesa.

Qual é a probabilidade de os números inscritos nos três primeiros cartões serem primos?

**(A)** $\frac{5}{42}$ **(B)** $\frac{1}{21}$ **(C)** $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{5}{21}$

**7.** Um grupo de $n$ amigos, com $n \geq 3$, estão a combinar um jantar. Para tal, estão a decidir qual é o melhor dia da semana para o realizar. Cada um escolhe, de forma aleatória, um dos sete dias da semana.

Qual é a probabilidade de exatamente três dos amigos escolherem a quinta-feira?

**(A)** $\frac{6^{n-3}}{7^n}$ **(B)** $\frac{{}^nA_3}{n^7}$ **(C)** $\frac{{}^nC_3 \times 6^{n-3}}{{}^7A'_n}$ **(D)** $\frac{{}^nC_3}{{}^nA'_7}$

**8.** Considere o problema: "Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9. Determine quantos destes números são pares."

${}^6C_2 \times {}^4C_3 + 5^2 \times {}^4C_3$ é uma resposta correta ao problema.

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduziu à resposta.

**9.** Considere a expressão:

$$\frac{(n+1)! - {}^nA_n}{(n-1)!}, \, n \in \mathbb{N}$$

Para qualquer valor de $n$, a expressão anterior é igual a:

**(A)** ${}^nC_n$ **(B)** ${}^nC_1 \times {}^nC_{n-1}$

**(C)** ${}^nC_1$ **(D)** ${}^nC_1 + {}^nC_{n-1}$

**10.** Seja $E$ o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que $A$ e $B$ têm ambos probabilidade não nula e que $\frac{P(A|\,B)}{P(B)} = 1$.

Prove que:

$$P(A \cup \overline{B}\,) = \left(P(B)\right)^2 - P(B) + 1$$

**11.** Num instituto europeu de investigação trabalham cientistas de várias nacionalidades, sendo que alguns deles são portugueses.

Sabe-se, ainda, que:

- $40\%$ são cientistas da área da Matemática;
- em cada cinco cientistas da área da Matemática, três não são portugueses.

Escolhendo, ao acaso, um cientista deste instituto, qual é a probabilidade de ele não ser português ou não ser da área da Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

**12.** Nas férias de verão, um grupo de 15 amigos decidiu alugar três autocaravanas de modelos diferentes. Qualquer um dos amigos pode conduzir e decidiram entre si que cada autocaravana levaria no mínimo quatro pessoas e no máximo sete pessoas.

Nestas condições, e não interessando a organização dos amigos dentro de cada autocaravana, de quantos modos diferentes podem os amigos ficar distribuídos pelas autocaravanas?

**FIM**

## COTAÇÕES

| Item | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | | |
| **1.1.** | **1.2.** | **1.3.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **11.** | **12.** | |
| 15 | 15 | 10 | 20 | 10 | 15 | 15 | 10 | 10 | 20 | 10 | 15 | 15 | 20 | **200** |

# TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

**1.**

**1.1.** $\underbrace{\underline{R} \quad \underline{D} \quad \underline{V_1} \quad \underline{V_2} \quad \underline{V_3} \quad \underline{V_4}}$

$4! \quad \times \quad 4! \quad \times \quad 6! \quad = 414\,720$

- $4!$ é o número de maneiras distintas de os quatro reis permutarem entre si;
- $4!$ é o número de maneiras distintas de as quatro damas permutarem entre si;
- $6!$ é o número de maneiras distintas de o bloco dos reis, o bloco das damas e os quatro valetes permutarem entre si.

**1.2.** Existem três casos mutuamente exclusivos: saírem 0 ases ou sair 1 ás ou saírem 2 ases.

- ${}^{48}C_5$ é o número de maneiras distintas de se escolher cinco cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^{4}C_1 \times {}^{48}C_4$ é o número de maneiras distintas de se escolher um ás e quatro cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^{4}C_2 \times {}^{48}C_3$ é o número de maneiras distintas de se escolher dois ases e três cartas que não são ases, sem que a ordem interesse.

Assim, ${}^{48}C_5 + {}^{4}C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^{4}C_2 \times {}^{48}C_3 = 2\,594\,400$ é o número pedido.

**1.3. Opção (D)**

Número de casos possíveis:

$13^4 = 28\,561$ é o número de maneiras distintas de o André, o António, o Pedro e o Rodrigo escolherem, cada um, uma carta do naipe de paus.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2 \times 1 \times 1 \times 12 \times 12$

${}^{4}C_2$ é o número de maneiras diferentes de escolher quem são os dois rapazes que vão escolher o rei de paus e, por cada uma destas maneiras, existem $12 \times 12$ modos distintos de os restantes dois rapazes escolherem, cada um, uma carta de paus diferente do rei.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{4}C_2 \times 12^2}{13^4} = \frac{864}{28\,561}$.

**2.** $\underline{2}$ __ __ __ __ __ ou $\underline{4}$ __ __ __ __ __ ou $\underline{5}$ __ __ __ __ __

$4 \times 4 \times {}^{3}C_2 \quad + \quad 5 \times {}^{4}C_2 \times 2! \quad + \quad 5 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2$

Existem três casos mutuamente exclusivos:

- o número começa por 2: o algarismo 0 pode ocupar quatro posições distintas (unidades, dezenas, centenas ou unidades de milhar). Por cada uma destas posições, existem quatro posições diferentes para colocar o algarismo 2 que falta.

Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{3}C_{2}$ modos diferentes de escolher as posições dos dois algarismos 4. Finalmente, o algarismo 5 só tem uma posição possível.

- o número começa por 4: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem ${}^{4}C_{2}$ formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

  Por cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de escolher as posições do algarismo 4 e do algarismo 5.
- o número começa por 5: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem ${}^{4}C_{2}$ formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

  Por cada uma destas formas, existe apenas uma maneira ( ${}^{2}C_{2}$ ) de colocar os dois algarismos 4 nas posições que sobram.

Assim, o número pedido é igual a $4 \times 4 \times {}^{3}C_{2} + 5 \times {}^{4}C_{2} \times 2! + 5 \times {}^{4}C_{2} \times {}^{2}C_{2} = 138$.

**3. Opção (B)**

Como a linha do triângulo de Pascal tem 13 elementos, então $n = 12$.

Assim, os elementos dessa linha são:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ${}^{12}C_{0}$ | ${}^{12}C_{1}$ | ${}^{12}C_{2}$ | ... | ${}^{12}C_{10}$ | ${}^{12}C_{11}$ | ${}^{12}C_{12}$ |
| 1 | 12 | 66 | ... | 66 | 12 | 1 |

Para que a soma seja 13, teremos que escolher um 1 e um 12.

Assim, o número de casos favoráveis é igual a $2 \times 2$ e o número de casos possíveis é igual a ${}^{13}C_{2}$ .

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4}{{}^{13}C_{2}} = \frac{2}{39}$.

**4.** O termo geral deste desenvolvimento é:

$${}^{6}C_{k}\ a^{6-k} \times (2x)^{k} = {}^{6}C_{k}\ a^{6-k} \times 2^{k} \times x^{k}, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

O termo em $x^{3}$ ocorre quando $k = 3$:

$${}^{6}C_{3} \times a^{3} \times 2^{3} = -160 \Leftrightarrow 160a^{3} = -160$$
$$\Leftrightarrow a^{3} = -1$$
$$\Leftrightarrow a = -1$$

**5.** Sabemos que $P(A)=0{,}3$ e que $P(B)=0{,}5$. Além disso:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0{,}4$$
$$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0{,}4$$
$$\Leftrightarrow 1-0{,}4=P(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}6$$

Sabemos que:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Então:

$$0{,}6=0{,}3+0{,}5-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}8-0{,}6$$
$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$$

$$P(\overline{B}|(A\cup B))=\frac{P\left(\overline{B}\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P\left((\overline{B}\cap A)\cup\overbrace{(B\cap\overline{B})}^{\emptyset}\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P\left((A\cap\overline{B})\cup\emptyset\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{0{,}3-0{,}2}{0{,}6}=$$
$$=\frac{0{,}1}{0{,}6}=$$
$$=\frac{1}{6}$$

**6. Opção (B)**

Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis: ${}^4A_3\times 6!$, onde ${}^4A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente três dos quatro algarismos primos (2, 3, 5 e 7) para ocupar os três primeiros lugares. Por cada uma destas maneiras, existem 6! formas de colocar os restantes seis algarismos (um primo e cinco não primos) nos restantes seis lugares.

A probabilidade pretendida é $\frac{{}^4A_3\times 6!}{9!}=\frac{1}{21}$.

**7. Opção (C)**

Número de casos possíveis:

$$\underbrace{\underline{7} \times \underline{7} \times \underline{7} \times \underline{7} \times \ldots \times \underline{7}}_{n \text{ amigos}} = 7^n = {}^7A'_n$$

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{\underline{1} \times \underline{1} \times \underline{1} \times \underbrace{\underline{6} \times \ldots \times \underline{6}}_{n-3 \text{ amigos}}}_{n \text{ amigos}} \times {}^nC_3 = {}^nC_3 \times 6^{n-3}$$

Observe-se que ${}^nC_3$ é o número de maneiras de formar o grupo de amigos que escolheu a quinta-feira, sendo que, por cada umas destas maneiras, há $6^{n-3}$ maneiras de os restantes $n-3$ amigos escolherem um dos seis dias da semana que não a quinta-feira.

**8.** Pretendemos determinar quantos números naturais pares de sete algarismos se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 8.

No caso de o número terminar em 0, existem ${}^6C_2$ maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 8 e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^4C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 1. Assim, ${}^6C_2 \times {}^4C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em 0.

No caso de o número terminar em 8, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a primeira posição) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 8 que resta. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^4C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Feito isto, o algarismo 1 só tem uma maneira de ser colocado. Assim, $5^2 \times {}^4C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em oito.

${}^6C_2 \times {}^4C_3 + 5^2 \times {}^4C_3$ é, então, uma resposta correta ao problema.

**9. Opção (B)**

$$\frac{(n-1)! - {}^nA_n}{(n-1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n \times (n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,[(n+1)n - n]}{(n-1)!} =$$

$$= n^2 + n - n =$$

$$= n^2$$

- Na opção (A): ${}^nC_n = 1$
- Na opção (B): ${}^nC_1 \times {}^nC_{n-1} = n \times {}^nC_1 = n \times n = n^2$
- Na opção (C): ${}^nC_1 = n$
- Na opção (D): ${}^nC_1 + {}^nC_{n-1} = n + n = 2n$

**10.** Sabe-se que $\frac{P(A|B)}{P(B)} = 1$.

Assim:

$P(A|B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = (P(B))^2$

Como:

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(A) + 1 - P(B) - \big(P(A) - P(A \cap B)\big) =$$
$$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

e $P(A \cap B) = (P(B))^2$, vem que:

$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(B) + \big(P(B)\big)^2 = \big(P(B)\big)^2 - P(B) + 1$, como queríamos demonstrar.

**11.** Consideremos os acontecimentos:

*M*: "o cientista é da área da Matemática"

*N*: "o cientista é português"

Do enunciado, sabemos que:

- $P(M) = 0{,}4$
- $P(\overline{N}|M) = \frac{3}{5}$

Pretende-se saber $P(\overline{N} \cup \overline{M})$:

Como $P(\overline{N}|M) = \frac{3}{5}$ e $P(M) = 0{,}4$, tem-se que:

$$\frac{P(\overline{N} \cap M)}{P(M)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{N} \cap M) = \frac{3}{5} \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(M) - P(M \cap N) = 0{,}24$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4 - P(M \cap N) = 0{,}24$$
$$\Leftrightarrow P(M \cap N) = 0{,}16$$

Assim:

$$P(\overline{N} \cup \overline{M}) = P(\overline{N \cap M}) = 1 - P(N \cap M) =$$
$$= 1 - 0{,}16 =$$
$$= 0{,}84$$

A probabilidade de o cientista não ser português ou não ser da área da Matemática é 84%.

**12.** Existem três tipos de casos que se excluem mutuamente:

- 1.º caso: cada autocaravana leva cinco amigos;
- 2.º caso: duas autocaravanas levam quatro amigos e a outra leva sete;
- 3.º caso: uma autocaravana leva quatro amigos, outra leva cinco e a outra leva seis amigos.

Assim, para distribuir os amigos pelas três autocaravanas diferentes:

- no 1.º caso existem ${}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^{5}C_5 \times 3! = 4\,540\,536$ maneiras;
- no 2.º caso existem ${}^{15}C_4 \times {}^{11}C_4 \times {}^{7}C_7 \times 3! = 2\,702\,700$ maneiras;
- no 3.º caso existem ${}^{15}C_4 \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}C_6 \times 3! = 3\,783\,780$ maneiras.

No total, existem, então, 11 027 016 maneiras diferentes de os amigos se distribuírem pelas três autocaravanas.