



www.esffranco.edu.pt

(2024/2025)

# 4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 9

2.º Período

20/03/2025

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

O professor: \_\_\_\_\_

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x}}{2x-4} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{e}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{e-e^x}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

1.1. Quanto à assíntota horizontal do gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow -\infty$ :

- (A) tem equação  $y = 0$ ;
- (B) tem equação  $y = 1$ ;
- (C) tem equação  $y = e$ ;
- (D) não existe.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude a continuidade da função  $g$  em  $x = 1$ .

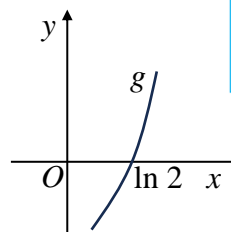
2. Considere a função  $f$ , diferenciável em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x - x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Sabe-se que  $f$  é crescente em  $]-\infty, \ln 2]$  e decrescente em  $[\ln 2, +\infty[$ .

Considere as proposições seguintes.

I.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

II. Ao lado está parte do gráfico da função  $g$ , primeira derivada de  $f$ .



Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Roberto Oliveira

**Exercícios**  
de  
**MATEMÁTICA A**  
para preparar o  
**Exame Nacional de**  
**2024**  
(inclui **3 provas modelo**)

Contém:  
-- mais de 300 temas originais de Matemática A  
-- 3 provas modelo originais de Matemática A  
-- resolução de TODOS os exercícios

3. Qual é o conjunto solução da condição  $5^{x-3} - 5^{x+3} \leq 30\,000$  ?  
 (A)  $[\log_5 6000, +\infty[$  (B)  $]-\infty, \log_5 3000]$  (C)  $\mathbb{R}$  (D)  $\emptyset$

4. No referencial o.n.  $xOy$  da figura, estão representados:

- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = 2^x - 3;$$

- parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = 2^{5-x} + 1;$$

- o triângulo  $[ABC]$ , tal que:

- $A$  pertence ao gráfico de  $f$  e tem ordenada positiva;
- $B$  pertence ao gráfico de  $f$  e tem abcissa 0;
- $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem a mesma ordenada de  $A$ .

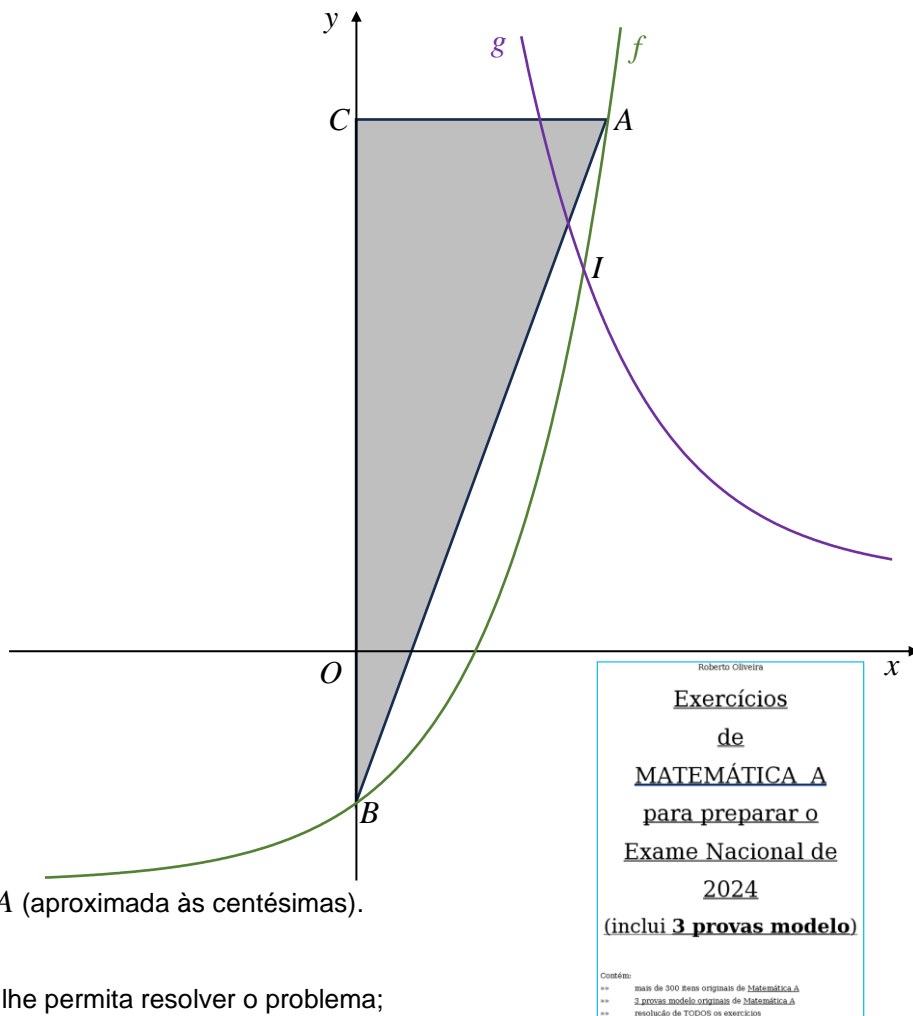
- 4.1. Usando processos analíticos, determine as coordenadas do ponto  $I$ , interseção entre os gráficos de  $f$  e  $g$ .

- 4.2. Sabe-se que a área do triângulo  $[ABC]$  é igual a 16,5.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de  $A$  (aproximada às centésimas).

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a condição, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s), se necessário, às centésimas.



5. O preço por quilograma de maçãs pode variar em função do seu «peso» médio.

Admita que o valor a pagar,  $P$ , em euros, por quilograma de uma variedade de maçãs, em função do «peso» médio das maçãs,  $x$ , em gramas, é dado, aproximadamente, por

$$P(x) = 1,059 \ln(x) - 3,2553, \text{ com } 40 \leq x \leq 270$$

- 5.1. Se o «peso» médio das maçãs aumentar de um quinto para um quarto de quilo, o preço por quilograma aumenta, aproximadamente:

- (A) 18 cêntimos; (B) 20 cêntimos; (C) 22 cêntimos; (D) 24 cêntimos.

- 5.2. Usando processos analíticos, determine o «peso» médio das maçãs se o preço for igual a 2 euros. Apresente o valor em gramas, arredondados às unidades.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 1.ª fase de 2023

6. Considere:

- a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_a x$ , com  $a > 1$ ;
- a sucessão  $(u_n)$ , definida por  $u_n = \left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^{n^2}$ .

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$  é **I** e o valor de  $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$  é **II**.

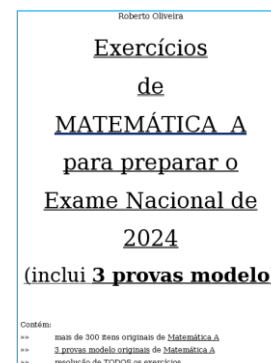
Dado um número  $b > 1$ , se  $\log_b a = -8$ , então  $f(b)$  é igual a **III** e,  $\log_b 10 = 6$ , então  $f(100)$  é dada pela expressão **IV**.

I	II	III	IV
a) $-\infty$	a) $\frac{1}{3}$	a) $-\frac{1}{8}$	a) $6 \log_a(10b)$
b) $e^{-7}$	b) $\sqrt[3]{a}$	b) $\frac{a}{b}$	b) $12 \log_a b$
c) $+\infty$	c) $-\frac{1}{3}$	c) 8	c) $24 \log_b a$

7. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais superiores a 1, tais que  $a = b^\pi$ .

Qual dos valores seguintes é igual a  $\log_a b$ ?

- (A)  $\frac{1}{\pi}$                       (B)  $\frac{2}{\pi}$                       (C)  $\pi$                       (D)  $2\pi$



8. Seja  $f$  a função, de domínio  $]1, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \ln(x^2 - 1) + 3x$ .

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- 8.1. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.
- 8.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de  $f$  pertencente ao intervalo  $]\sqrt{2}, \sqrt{e}[$  de ordenada igual a 5.  
Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

9. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da seguinte inequação.

$$\log_6(8 - 2x) - 2 \geq \log_6(x + 1)$$

10. Considere um número positivo  $k$  e a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $h(x) = \ln(ke^{2x} + 2) - 2x$ .

10.1. Suponha, nesta alínea, que  $k = 1$ .

Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $f(x) = h(x) + 2x$ .

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função  $f^{-1}$ , função inversa de  $f$ ?

- (A)  $e^x - 2$       (B)  $2 - e^x$       (C)  $\frac{\ln(e^x - 2)}{2}$       (D)  $\frac{\ln(2 - e^x)}{2}$

10.2. Sem usar a calculadora, determine  $k$ , sabendo que  $y = 3$  é a equação de uma assíntota do gráfico de  $h$ .

FIM

COTAÇÕES

Item														Cotação (em pontos)	
1.1.	1.2.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.	10.1.		10.2.
8	16	16	8	16	16	8	16	16	8	16	16	16	8	16	200

Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cos b + \text{sen}b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos}a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}u)' = u' \cos u$

$(\text{cos}u)' = -u' \text{sen}u$

$(\text{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Roberto Oliveira

**Exercícios**  
de  
**MATEMÁTICA A**  
para preparar o  
**Exame Nacional de**  
**2024**  
(inclui **3 provas modelo**)

Contém:  
-- mais de 300 itens originais de Matemática A  
-- 3 provas modelo originais de Matemática A  
-- resolução de TODOS os exercícios