



www.esffranco.edu.pt

(2024/2025)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 9

2.º Período

20/03/2025

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x}}{2x-4} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{e}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{e-e^x}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

1.1. Quanto à assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$:

- (A) tem equação $y = 0$; (B) tem equação $y = 1$;
 (C) tem equação $y = e$; (D) não existe.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude a continuidade da função g em $x = 1$.

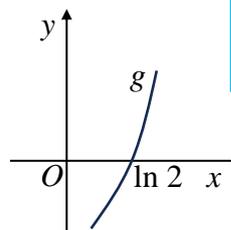
2. Considere a função f , diferenciável em \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x - x^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que f é crescente em $]-\infty, \ln 2]$ e decrescente em $[\ln 2, +\infty[$.

Considere as proposições seguintes.

I. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

II. Ao lado está parte do gráfico da função g , primeira derivada de f .



Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Roberto Oliveira

Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de
2024
(inclui **3 provas modelo**)

Contém: mais de 300 temas originais de Matemática A
3 provas modelo originais de Matemática A
resolução de TODOS os exercícios

3. Qual é o conjunto solução da condição $5^{x-3} - 5^{x+3} \leq 30\,000$?
 (A) $[\log_5 6000, +\infty[$ (B) $]-\infty, \log_5 3000]$ (C) \mathbb{R} (D) \emptyset

4. No referencial o.n. xOy da figura, estão representados:

- parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = 2^x - 3;$$

- parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = 2^{5-x} + 1;$$

- o triângulo $[ABC]$, tal que:

- A pertence ao gráfico de f e tem ordenada positiva;
- B pertence ao gráfico de f e tem abcissa 0;
- C pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de A .

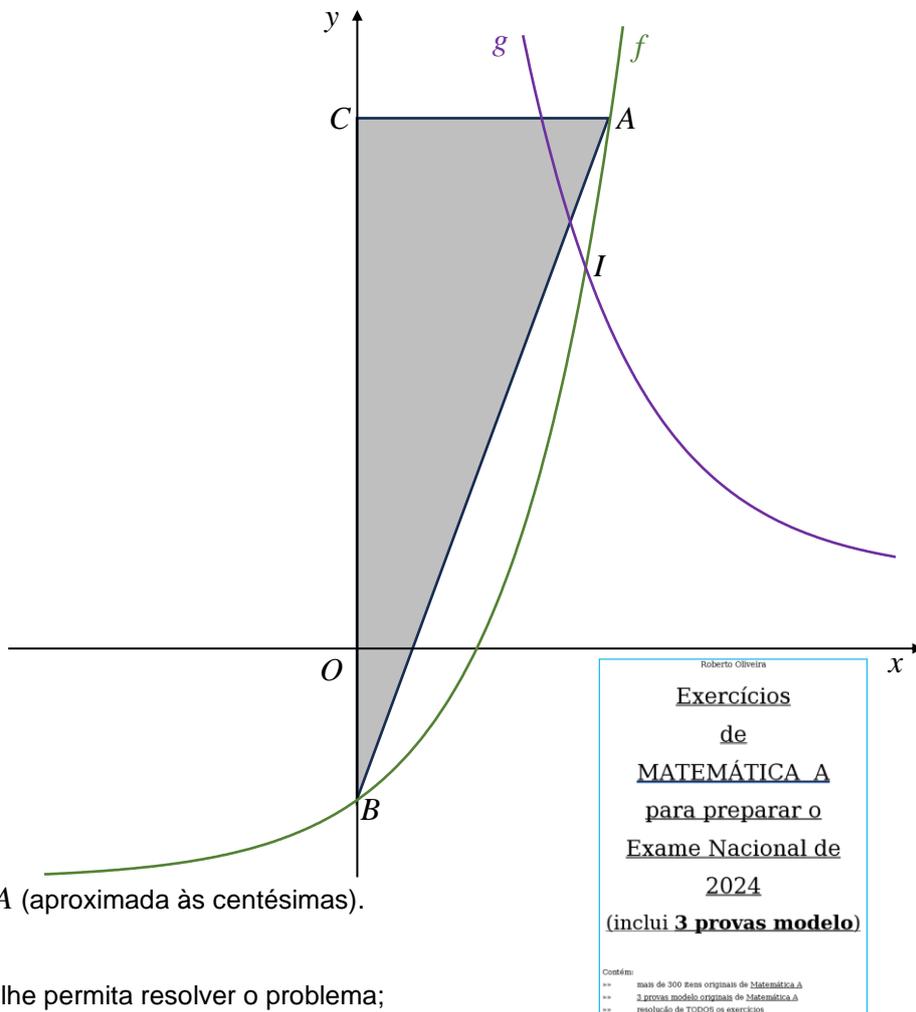
4.1. Usando processos analíticos, determine as coordenadas do ponto I , interseção entre os gráficos de f e g .

4.2. Sabe-se que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 16,5.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de A (aproximada às centésimas).

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a condição, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s), se necessário, às centésimas.



5. O preço por quilograma de maçãs pode variar em função do seu «peso» médio.

Admita que o valor a pagar, P , em euros, por quilograma de uma variedade de maçãs, em função do «peso» médio das maçãs, x , em gramas, é dado, aproximadamente, por

$$P(x) = 1,059 \ln(x) - 3,2553, \text{ com } 40 \leq x \leq 270$$

5.1. Se o «peso» médio das maçãs aumentar de um quinto para um quarto de quilo, o preço por quilograma aumenta, aproximadamente:

- (A) 18 cêntimos; (B) 20 cêntimos; (C) 22 cêntimos; (D) 24 cêntimos.

5.2. Usando processos analíticos, determine o «peso» médio das maçãs se o preço for igual a 2 euros. Apresente o valor em gramas, arredondados às unidades.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 1.ª fase de 2023

6. Considere:

- a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$;
- a sucessão (u_n) , definida por $u_n = \left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^{n^2}$.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$ é **I** e o valor de $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$ é **II**.

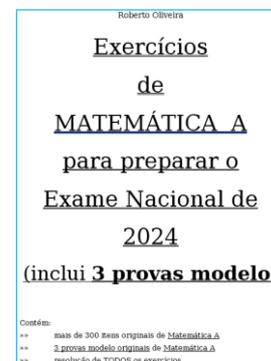
Dado um número $b > 1$, se $\log_b a = -8$, então $f(b)$ é igual a **III** e, $\log_b 10 = 6$, então $f(100)$ é dada pela expressão **IV**.

I	II	III	IV
a) $-\infty$	a) $\frac{1}{3}$	a) $-\frac{1}{8}$	a) $6 \log_a(10b)$
b) e^{-7}	b) $\sqrt[3]{a}$	b) $\frac{a}{b}$	b) $12 \log_a b$
c) $+\infty$	c) $-\frac{1}{3}$	c) 8	c) $24 \log_b a$

7. Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a = b^\pi$.

Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b$?

- (A) $\frac{1}{\pi}$ (B) $\frac{2}{\pi}$ (C) π (D) 2π



8. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x^2 - 1) + 3x$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- 8.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.
- 8.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de f pertencente ao intervalo $]\sqrt{2}, \sqrt{e}[$ de ordenada igual a 5.
Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

9. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da seguinte inequação.

$$\log_6(8 - 2x) - 2 \geq \log_6(x + 1)$$

10. Considere um número positivo k e a função h , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = \ln(ke^{2x} + 2) - 2x$.

10.1. Suponha, nesta alínea, que $k = 1$.

Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = h(x) + 2x$.

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função f^{-1} , função inversa de f ?

- (A) $e^x - 2$ (B) $2 - e^x$ (C) $\frac{\ln(e^x - 2)}{2}$ (D) $\frac{\ln(2 - e^x)}{2}$

10.2. Sem usar a calculadora, determine k , sabendo que $y = 3$ é a equação de uma assíntota do gráfico de h .

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	1.2.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.	10.1.	10.2.	200
8	16	16	8	16	16	8	16	16	8	16	16	16	8	16	

Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cos b + \text{sen}b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos}a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}u)' = u' \cos u$

$(\text{cos}u)' = -u' \text{sen}u$

$(\text{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Roberto Oliveira

Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de
2024
(inclui 3 provas modelo)

Contém:
-- mais de 300 itens originais de Matemática A
-- 3 provas modelo originais de Matemática A
-- resolução de TODOS os exercícios