TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA - 10.º ANO
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Sendo o valor lógico de $p \vee \sim q$ falso, as proposições p e $\sim q$ são ambas falsas. Sendo $\sim q$ falsa, q é verdadeira. Assim, conclui-se que:

$\sim p \wedge q$ é verdadeira;

$\sim p \wedge \sim q$ é falsa;

$\sim (\sim p \vee q)$ é falsa;

$\sim (\sim p \vee \sim q)$ é falsa.

Opção correta: (A)

2.

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, \sim (x > 2) \Rightarrow x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \Rightarrow x < 2$

A proposição é falsa, pois $x \leq 2 \Rightarrow x < 2$ não é condição universal.

(B) $\exists x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow \ \sim (x > 2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow x \leq 2$

A proposição é verdadeira, pois $x < 2 \Rightarrow x \leq 2$ é uma condição possível.

(C) $\sim (\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 2)$

A proposição é falsa, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 2$ é uma proposição verdadeira ($x > 2 \Rightarrow x \geq 2$ é uma condição universal).

(D) $\sim (\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \Rightarrow x > 2)$

A proposição é falsa, pois $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \Rightarrow x > 2$ é uma proposição verdadeira ($x \geq 2 \Rightarrow x > 2$ é uma condição possível).

Opção correta: (B)

3. $\dfrac{1}{\sqrt{a} \times \sqrt{2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a \times 2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2a}$

Opção correta: (C)

4. I. $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{18}\right)^2}=\sqrt{20}$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{v}\|$

II. $\frac{\sqrt{2}}{-1}=\frac{-\sqrt{18}}{3}\Leftrightarrow -\sqrt{2}=\frac{-3\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow -\sqrt{2}=-\sqrt{2}$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

Opção correta: (A)

5. Um vetor diretor da reta r tem coordenadas $(0-4, 2-0)$, ou seja, $(-4, 2)$. Portanto, as equações apresentadas nas opções (A) e (B) não podem ser equações vetoriais da reta, pois os correspondentes vetores diretores não são colineares.

Substituamos as coordenadas de um ponto da reta, por exemplo, do ponto de coordenadas $(0, 2)$, nas equações apresentadas nas opções (C) e (D).

$$(0,2)=(2,1)+k(-2,1)\Leftrightarrow\begin{cases}0=2-2k\\2=1+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\k=1\end{cases}\Leftrightarrow k=1$$

$$(0,2)=(1,2)+k(-2,1)\Leftrightarrow\begin{cases}0=1-2k\\2=2+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\k=0\end{cases}\quad\text{(impossível)}$$

Opção correta: (C)

6. Os pontos com coordenadas apresentadas nas opções (A) e (B) não pertencem ao plano coordenado xOy, pelo que não podem corresponder ao ponto de interseção da reta com esse plano.

Verifiquemos qual dos pontos com coordenadas apresentadas nas opções (C) e (D) pertence à reta (sabemos que pertencem ao plano coordenado xOy).

$$(3,-1,0)=(3,-4,5)+k(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}3=3+0k\\-1=-4+k\\0=5-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=3\\k=3\\k=5\end{cases}\quad\text{(impossível)}$$

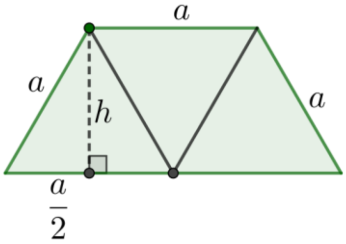
$$(3,1,0)=(3,-4,5)+k(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}3=3+0k\\1=-4+k\\0=5-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=3\\k=5\\k=5\end{cases}\Leftrightarrow k=5$$

Alternativamente, poder-se-ia ter resolvido o sistema de equações definido por:
$(x,y,0)=(3,-4,5)+k(0,1,-1)$

Opção correta: (D)

7. $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$A = \frac{2a+a}{2} \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$



8.1 $y \geq 2x \vee x < 1$

8.2 A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

A região representada a sombreado fica definida por: $x \leq 0 \wedge \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

9.1 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 1 - 8y = 8x - 6y + 9 \Leftrightarrow y = -3x - 4$

9.2 $\overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$, $\overline{BC} = \sqrt{(-1+4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

$\overline{AC} = \sqrt{(0+4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20}$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{20}^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 \Leftrightarrow 20 = 20$

Conclui-se, então, que o triângulo é retângulo em B.

9.3 Uma vez que $[AC]$ é diâmetro da circunferência, $\frac{\overline{AC}}{2}$ é a medida do raio e o ponto médio de $[AC]$ é o centro da circunferência.

Assim, $\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}$ e $M_{[AC]}\left(\frac{0-4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = M_{[AC]}(-2, 2)$.

Desta forma, a equação reduzida da circunferência é

$$(x+2)^2+(y-2)^2=\left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=5.$$

Substituindo as coordenadas do ponto B nesta equação, obtemos

$$(-1+2)^2+(4-2)^2=5 \Leftrightarrow 5=5,$$

o que mostra que o ponto B é um ponto da circunferência de diâmetro $[AC]$.

10. $x^2+y^2-12x+4y=-20 \Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2+4y+4=-20+36+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(y+2)^2=20$

A circunferência tem centro no ponto $C(6,-2)$ e raio $\sqrt{20}$.

As retas horizontais tangentes à circunferência podem definir-se analiticamente por $y=-2-\sqrt{20}$ e $y=-2+\sqrt{20}$.

11.1 $y=0$

11.2 $y=0 \wedge z=3$

11.3 $A(5,0,3)$ e $E(-5,2,0)$.

$\overrightarrow{AE}=E-A=(-5,2,0)-(5,0,3)=(-10,2,-3)$

$\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\sqrt{(-10)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{113}$

A equação reduzida da superfície esférica de centro em A e raio igual à norma de $\overrightarrow{AE}$ é: $(x-5)^2+y^2+(z-3)^2=113$

11.4 O polígono que se obtém no prisma através da interseção com o plano de equação $x=-2$ é um triângulo retângulo cujos catetos medem $2\,\text{cm}$ e $3\,\text{cm}$. Assim, a área desse polígono é igual a $\frac{2\times 3}{2}=3\,\text{cm}^2$.

FIM