TESTE DE AVALIAÇÃO GLOBAL – MATEMÁTICA A
10.º ANO
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

(A) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ é uma proposição falsa, porque $0 \in \mathbb{R}$ e $0^2 = 0$;

(B) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ é uma proposição falsa, porque $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$;

(C) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ é uma proposição verdadeira $\left(x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -1\right)$;

(D) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$ é uma proposição falsa, porque $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$.

Opção correta: (C)

2. As retas que definem a fronteira da região sombreada têm equação $x = 1$ e $y = -3$; a região pode ser definida pela condição $x < 1 \vee y > -3$.

Opção correta: (B)

3. $\vec{c} = -\sqrt{5}\,\vec{d}$, pelo que os vetores são colineares e $\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2 + \left(-2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5 + 20} = 5$.

Opção correta: (C)

4. O gráfico da função definida por $f(x-1)+1$ obtém-se a partir do gráfico da função f por uma translação de vetor $\vec{u}(1,0)$ seguida da translação de vetor $\vec{v}(0,1)$.

Opção correta: (A)

5. Das expressões analíticas apresentadas, a única que define, em $\mathbb{R}$, uma função ímpar é $f(x) = x^3$, porque, dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-x \in \mathbb{R}$ e $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Opção correta: (B)

6.1 $x = 0$

6.2 $x = -4 \wedge y = 0$

6.3 O ponto C tem coordenadas $(0,-4,0)$ e o volume do prisma é $96\,\text{cm}^3$; portanto, tem-se $4 \times 4 \times \overline{GE} = 96 \Leftrightarrow \overline{GE} = 6$; então, o ponto E tem coordenadas $(-4,0,6)$; por fim, $\overrightarrow{CE} = E - C$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{CE}$ são $(-4,4,6)$.

6.4 Por exemplo, $(x,y,z) = (0,-4,0) + k(-4,4,6),\ k \in \mathbb{R}$.

6.5 $r = \frac{\overline{CG}}{2} = \frac{\sqrt{4^2+4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$; $r^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = \frac{32}{4} = 8$; o centro da superfície esférica é o ponto médio de $[CG]$, que tem coordenadas $(-2,-2,0)$; portanto, a equação pedida é:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 8$$

7.1 $(-3)^3 - (-3)^2 - 8(-3) + 12 = -27 - 9 + 24 + 12 = 0$

7.2 De 7.1., sabemos que -3 é uma raiz de $x^3 - x^2 - 8x + 12$, pelo que o polinómio é divisível por $x+3$. Aplicando a regra de Ruffini, temos:

	1	-1	-8	12
-3		-3	12	-12
	1	-4	4	0

Então, $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x+3)(x^2 - 4x + 4)$. Como $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, tem-se $f(x) = (x+3)(x-2)^2$, donde $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$; concluindo, -3 e 2 são os zeros de f .

Quadro de sinal da função f :

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

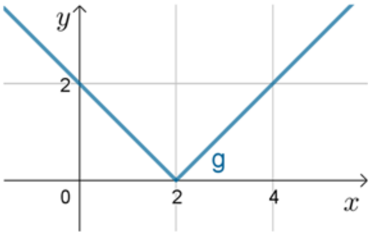
Portanto, f é negativa em $]-\infty,-3[$ e é positiva em $]-3,2[$ e $]2,+\infty[$.

8.1 $g(x)=5 \Leftrightarrow |x-2|=5 \Leftrightarrow x-2=5 \vee x-2=-5 \Leftrightarrow x=7 \vee x=-3$

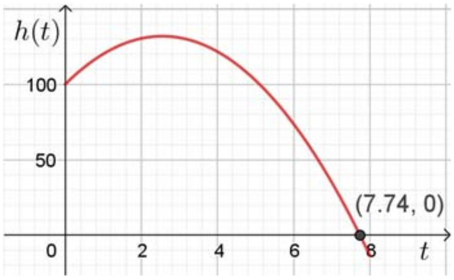
8.2 Por exemplo:

$$g(x)=|x-2|=\begin{cases} -x+2 & \text{se } x<2 \\ x-2 & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

8.3



9.1 $h(t)=0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+25t+100=0$



Demorou cerca de 7,74 segundos.

9.2 A altura máxima corresponde à ordenada do vértice da parábola que contém o gráfico da função h. Determinemos o respetivo valor:

$$h(t)=-4{,}9t^2+25t+100=-4{,}9\left(t^2-\frac{25}{4{,}9}t\right)+100$$

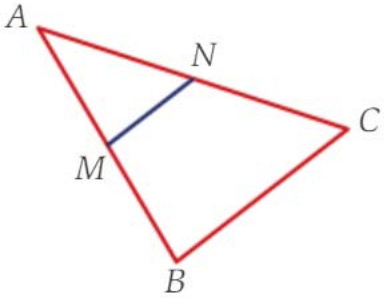
$$=-4{,}9\left[\left(t-\frac{12{,}5}{4{,}9}\right)^2-\left(\frac{12{,}5}{4{,}9}\right)^2\right]+100=-4{,}9\left(t-\frac{125}{49}\right)^2\underbrace{+4{,}9\times\left(\frac{125}{49}\right)^2+100}_{131{,}88\ldots}$$

A altura máxima atingida foi de cerca de 132 metros.

Por outro processo, também se podem calcular os zeros da função real de variável real definida por $y=-4{,}9x^2+25x+100=0$ e a imagem do ponto médio das respetivas abcissas.

Por outro, ainda, é aceitável o uso imediato da fórmula das coordenadas do vértice.

10. Para provar que $[MN]$ é paralelo a $[BC]$, podemos provar, de modo equivalente, que $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores colineares, ou seja, que existe um número real k tal que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$:



Tem-se $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$, com $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; então:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$$

Portanto, $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores colineares, pelo que $[MN]$ é paralelo a $[BC]$.

Por outro processo:

Sendo as retas AB e AC concorrentes em A, e M e N os pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente, tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{NC}} = 2$, donde, pelo recíproco do teorema de Tales, se conclui que MN e BC são retas paralelas e, portanto, $[MN]$ é paralelo a $[BC]$.

11.

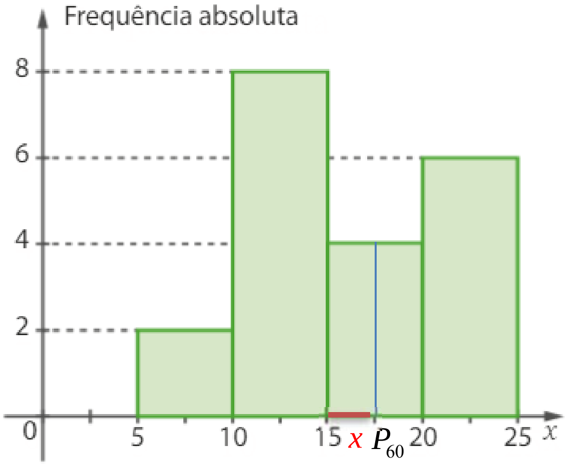
$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in [-3, +\infty[\wedge f(x) \in [-1, 1]\right\}$;

$f(x) \in [-1,1] \Leftrightarrow -1 \leq x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3 \leq x \leq 1 + 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [2,4]$;

portanto, $D_{g\circ f} = [-3, +\infty[\cap [2,4] = [2,4]$.

12. Sendo N a dimensão da amostra, tem-se $N = 2+8+4+6 = 20$.

Como $60\% \times 20 = 12$, obtendo as frequências acumuladas conclui-se que o percentil 60 pertence à classe $[15, 20[$.



Para obter P_{60}, começamos por calcular a área total do histograma: $5 \times (2+8+4+6) = 100$.

Sendo $P_{60} = 15 + x$, x é tal que $5 \times (2+8) + x \times 4 = 60$:

$5 \times (2+8) + x \times 4 = 60 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = 2,5$

Portanto, $P_{60} = 15 + 2,5 = 17,5$.

FIM