TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Seja A a área total da pirâmide quadrangular regular de aresta a.

$A = a^2 + 4 \times \frac{a \times h}{2}$, onde h é a altura de cada uma das faces.

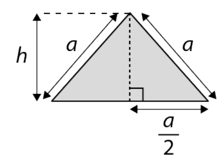
Assim:

$$A = a^2 + 4 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} =$$
$$= a^2 + 4 \frac{\sqrt{3} a^2}{4} =$$
$$= a^2 + \sqrt{3} a^2 =$$
$$= a^2 (1 + \sqrt{3})$$

Cálculo auxiliar

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Logo, $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.



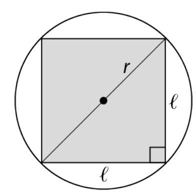
2. Seja l o lado do quadrado inscrito na circunferência de raio r e A a área do quadrado.

$$A = l^2 = \frac{2}{(\sqrt{7}-1)^2} =$$
$$= \frac{2}{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} + 1} =$$
$$= \frac{2}{8 - 2\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{1}{4 - \sqrt{7}} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{4^2 - (\sqrt{7})^2} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{16-7} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

Cálculo auxiliar

$$r = \frac{1}{\sqrt{7} - 1}$$

$$l^2 + l^2 = (2r)^2$$
$$\Leftrightarrow 2l^2 = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{7}-1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow l^2 = \frac{2}{(\sqrt{7}-1)^2}$$



3. Opção (B)

$$\sim (y < 0 \vee y \geq x) \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y < x$$

4.

4.1. Coordenadas do ponto médio de $[PQ]$: $\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Coordenadas de um vetor diretor da bissetriz dos quadrantes pares: $(-1,1)$

Equação vetorial da reta pretendida: $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + k(-1,1), k \in \mathbb{R}$

4.2.

4.2.1. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, -2) - (1, 2) = (-3, -4)$

$m = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}x + b$

Como P pertence à reta PQ, vem $2 = \frac{4}{3} \times 1 + b$.

Logo, $b = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Equação reduzida da reta PQ: $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

Para que $R(k, k-1)$ pertença à reta PQ, tem que se verificar:

$k - 1 = \frac{4}{3} \times k + \frac{2}{3} \Leftrightarrow k - \frac{4}{3}k = \frac{2}{3} + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}k = \frac{5}{3} \Leftrightarrow k = -5$

4.2.2. Para que $R(k, k-1)$ pertença à mediatriz de $[PQ]$, tem que se verificar $d(R, P) = d(R, Q)$.

Temos que:

$d(R, P) = d(R, Q)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(k-1)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-1+2)^2}$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 6k + 9 = k^2 + 4k + 4 + k^2 + 2k + 1$

$\Leftrightarrow -8k + 10 = 6k + 5$

$\Leftrightarrow -14k = -5$

$\Leftrightarrow k = \frac{5}{14}$

Logo, o valor de k para o qual R pertence à mediatriz de $[PQ]$ é $\frac{5}{14}$.

4.3. $\overrightarrow{PQ} = (-3, -4)$

Para o vetor ser colinear com $\overrightarrow{PQ}$, tem de ser da forma $\lambda\overrightarrow{PQ}$, isto é,$(-3\lambda, -4\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Para que tenha norma $\sqrt{15}$, tem que acontecer:

$\sqrt{(-3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = \sqrt{15} \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 15 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 15$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{15}{25}$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{15}{25}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{15}}{5} \vee \lambda = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{PQ}$, tem-se que $\lambda = -\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas $\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}, \frac{4\sqrt{15}}{5}\right)$.

5. Opção (D)

$$(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2a^6b^8}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{8a^{-2}}{2a^6b^8}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{4}{a^8b^8}} =$$

$$= \frac{4^{\frac{1}{4}}}{(a^8b^8)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{(2^2)^{\frac{1}{4}}}{a^2 \times b^2} =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(ab)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(ab)^2}$$

6.

6.1.

6.1.1. $x^2 + y^2 - 4x - 10y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 10y + 5^2 = 2^2 + 5^5$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 29$$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas (2, 5). Como este ponto não pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois não verifica a condição $y = x$, a proposição apresentada é falsa.

6.1.2. Determinação das coordenadas do ponto A: $A(x, 7)$

Como A pertence à circunferência, vem que:

$$(x-2)^2 + (7-5)^2 = 29 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4 = 29$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -3$$

Como A pertence ao 2.º quadrante, tem--se que $x < 0$. Logo, $x = -3$.

Assim, $A(-3, 7)$.

$\overrightarrow{OA}$ é um vetor diretor da reta r e $\overrightarrow{OA} = A - O = (-3, 7)$. Logo, a equação reduzida é do tipo$y = -\frac{7}{3}x + b$. Como a reta passa na origem, vem que $y = -\frac{7}{3}x$.

A reta t definida por $\begin{cases} x = \pi + 6k \\ y = \sqrt{2} - 14k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ tem como vetor diretor $\vec{u}(6, -14)$ (por exemplo) e o seu declive é, então, $-\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$.

Como os declives das retas r e t são iguais, as retas são paralelas (não são retas coincidentes pois, por exemplo, o ponto da reta t de coordenadas $(\pi, \sqrt{2})$ não pertence à reta r, já que $\sqrt{2} \neq -\frac{7}{3}\pi$).

Assim, a proposição apresentada é verdadeira.

6.2. $((x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \wedge y \geq 7) \vee \left((x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \wedge y \leq -\frac{7}{3}x\right)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \wedge \left(y \geq 7 \vee y \leq -\frac{7}{3}x\right)$

7. Opção (B)

p: $\sqrt{(-2019)^2} = -2019$ é uma proposição falsa.

q: $\sqrt[3]{(-2018)^3} = -2018$ é uma proposição verdadeira.

Assim:

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \wedge \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

$(p \vee q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

8. Opção (C)

Das opções apresentadas, apenas o vetor de coordenadas (0, 2018) tem a direção do eixo Oy.

Assim, a única equação que pode definir a reta r é $(x, y) = (3, 3) + k(0, 2018), k \in \mathbb{R}$.