Máximo
Matemática A
10

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Porto Editora

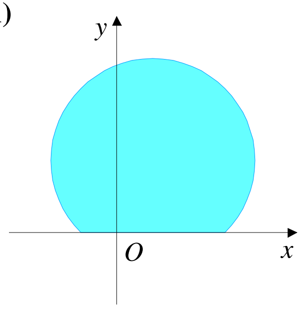
Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

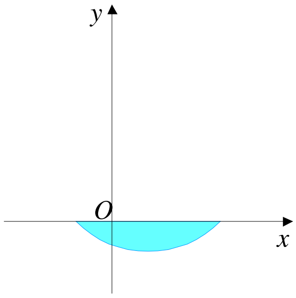
1. Considere a condição $\sim\left[(x-1)^2+(y-2)^2>8 \vee y>0\right]$.

Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o conjunto de pontos definido por esta condição?

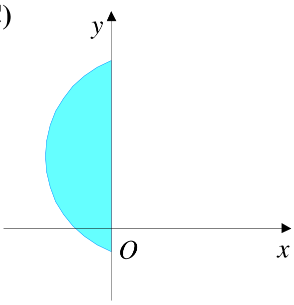
(A)



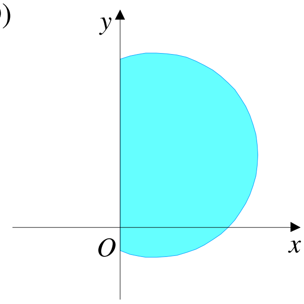
(B)



(C)



(D)



2. Considere, num plano munido de um referencial o.n. xOy, a circunferência de equação $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Qual das equações seguintes define uma reta tangente a esta circunferência?

(A) $x=5$ **(B)** $x=1$ **(C)** $y=4$ **(D)** $x=-4$

3. Num plano munido de um referencial o.n. xOy, as retas de equações $y=x-1$ e $y=-x+5$ são, respetivamente, as mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$.

Sabendo que A, B e C são pontos de uma circunferência, qual das opções seguintes é o centro dessa circunferência?

(A) $(2,3)$ **(B)** $(3,2)$ **(C)** $(1,-1)$ **(D)** $(-2,1)$

4. Num referencial ortonormado, o ponto $P(k,2)$ é equidistante dos pontos $A(3,1)$ e $B(2,4)$.

Em qual das opções seguintes está representado o valor de k ?

(A) $k=0$ **(B)** $k=-1$ **(C)** $k=1$ **(D)** $k=\frac{1}{2}$

5. A equação $x^2+y^2-4x+8y+k=0$, com $k\in\mathbb{R}$, representa uma circunferência.

Qual das seguintes condições representa todos os valores que k pode tomar?

(A) $k>10$ **(B)** $k>20$ **(C)** $k<10$ **(D)** $k<20$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere num referencial o.n. xOy o ponto $A\left(m^2-1\,,2-2m\right)$, com $m\in\mathbb{R}$.

1.1. Determine m de modo que o ponto A pertença

a) ao eixo Oy ;

b) à bissetriz dos quadrantes ímpares.

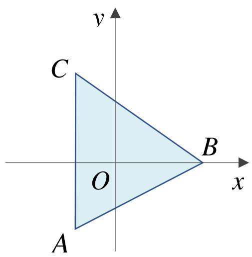
1.2. Considere agora que $m=\frac{1}{2}$.

No mesmo referencial, o ponto $M(-1,1)$ é ponto médio de $[AB]$.

a) Mostre que B é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{5}{4},1\right)$.

b) Determine o ponto D, pertencente ao eixo Oy, tal que, $d(M,D)=2$.

2. Na figura ao lado, num plano munido de um referencial o.n. xOy, está representado o triângulo isósceles $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC}=\overline{BC}$
- $A(-1,-2)$ e $B(2,0)$;
- os pontos A e C têm a mesma abcissa.

2.1. Mostre que uma equação cartesiana da mediatriz de $[AB]$ é $6x+4y+1=0$.

2.2. Determine as coordenadas do ponto C .

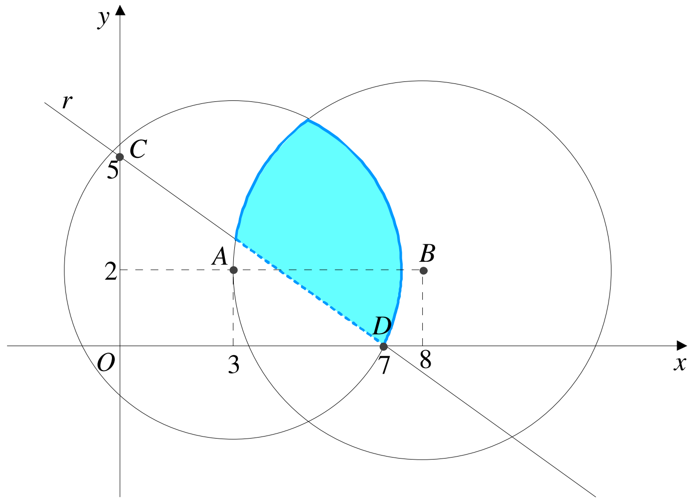
3. Considere, num plano munido de um referencial o.n. xOy, os pontos $A(3,0)$, $B(-4,2)$ e $C(1,2)$.

3.1. Mostre que $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro C e que passa no ponto A.

3.2. Averigue qual a posição do ponto B em relação à circunferência considerada em **3.1**.

4. No referencial ortonormado xOy da figura estão representados:

- os pontos $A(3,2)$, $B(8,2)$, $C(0,5)$ e $D(7,0)$;
- a reta r que passa nos pontos C e D;
- a circunferência de centro no ponto A que passa no ponto D;
- a circunferência de centro no ponto B que passa no ponto A.



4.1. Escreva a equação reduzida da reta r.

4.2. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada da figura.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.1.a)	1.1.b)	1.2.a)	1.2.b)	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	Total
5	10	25	20	15	15	15	15	10	30	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $\sim\left[(x-1)^2+(y-2)^2>8\ \vee\ y>0\right]\Leftrightarrow$

$\overset{\text{Leis de De Morgan}}{\Leftrightarrow}\ \sim\left[(x-1)^2+(y-2)^2>8\right]\wedge\sim(y>0)$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)\leq 8\wedge y\leq 0$

Resposta: **(B)**

2. Circunferência de centro $(2\ ,\ -1)$ e raio 3 : as tangentes paralelas aos eixos coordenados têm equações $x=-1$, $x=5$, $y=-4$ e $y=2$.

Resposta: **(A)**

3. O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo $[ABC]$ é o centro da circunferência que passa em A , B e C . Portanto, o centro da circunferência é o ponto de interseção das retas de equações $y=x-1$ e $y=-x+5$:

$$\begin{cases}y=x-1\\y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1\\x-1=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1\\2x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-1\\x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(3\ ,\ 2)$.

Resposta: **(B)**

4. $d(A,\ P)=d(B,\ P)\Leftrightarrow\sqrt{(3-k)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(2-k)^2+(4-2)^2}$

$\Leftrightarrow(3-k)^2+1=(2-k)^2+4$

$\Leftrightarrow 9-6k+k^2+1=4-4k+k^2+4$

$\Leftrightarrow -2k=-2\Leftrightarrow k=1$

Resposta: **(C)**

5. $x^2+y^2-4x+8y+k=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+8y+k=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y+4)^2-16+k=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+4)^2=20-k$

$20-k>0\Leftrightarrow -k>-20\Leftrightarrow k<20$

Resposta: **(D)**

Grupo II

1.1. **a)** $m^2-1=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=-1\vee m=1$

b) $m^2-1=2-2m\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-3)}}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow m=-3\vee m=1$

1.2. **a)** Se $m=\frac{1}{2}$, então $A\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\ ,\ 2-2\times\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $A\left(-\frac{3}{4}\ ,\ 1\right)$.

Seja $B(x\ ,\ y)$, então $(-1\ ,\ 1)=\left(\frac{-\frac{3}{4}+x}{2}\ ,\ \frac{1+y}{2}\right)$.

Pelo que: $-1=\frac{-\frac{3}{4}+x}{2}\wedge 1=\frac{1+y}{2}$

$\Leftrightarrow -2=-\frac{3}{4}+x\wedge 2=1+y$

$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}\wedge y=1$. Assim, $B\left(-\frac{5}{4}\ ,\ 1\right)$.

b) $D(0\ ,\ y)$

$d(M\ ,\ D)=2\Leftrightarrow\sqrt{(-1-0)^2+(1-y)^2}=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+1-2y+y^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{y^2-2y+2}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-2y+2=4\Leftrightarrow y^2-2y-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}\Leftrightarrow y=1+\sqrt{3}\vee y=1-\sqrt{3}$

Assim: $D\left(0\ ,\ 1+\sqrt{3}\right)$ ou $D\left(0\ ,\ 1-\sqrt{3}\right)$

2.1. $(x+1)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4=x^2-4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow 2x+1+4y+4x=0$

$\Leftrightarrow 6x+4y+1=0$

2.2. A mediatriz de $[AB]$ passa no ponto C.

Então para $x=-1$, tem-se: $6\times(-1)+4y+1=0\Leftrightarrow 4y=5\Leftrightarrow y=\frac{5}{4}$

Assim, $C\left(-1\ ,\ \frac{5}{4}\right)$.

3.1. Raio $=d(A\ ,\ C)=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=8$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-3=0$

3.2. $d(C\ ,\ B)=\sqrt{(-4-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{25}=5$

Como $d(C\ ,\ B)>d(A\ ,\ C)$, então B é um ponto exterior à circunferência.

4.1. $m=\frac{0-5}{7-0}=-\frac{5}{7}$ (declive)

$y=-\frac{5}{7}x+5$

4.2. $d(A\ ,\ D)=\sqrt{(3-7)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}$

$d(B\ ,\ A)=\sqrt{(8-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{5^2}=5$

Condição: $y>-\frac{5}{7}x+5\wedge(x-3)^2+(y-2)^2\leq 20\wedge(x-8)^2+(y-2)^2\leq 25$